Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios Resolvidos - 16/04/2016

Cálculo 3 - Ciências da Computação

Professor:
Vinícius F. Wasques
viniwasques@hotmail.com

15 de abril de 2016

1 Exercícios :

Exercício 1.1. *Seja f uma função dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f é contínua e possui as derivadas parciais em $(0,0)$ mas não é diferenciável na origem.

Solução:

Como $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ então temos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Logo, f é contínua na origem.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Portanto, as derivadas parciais existem.

No entanto,

$$\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{||(h,k)||}$$

$$= \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2}-0-1h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{\frac{h^3-h(h^2+k^2)}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{\frac{-hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Chame $G(h,k) = \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$, veja que não existe o limite dessa função em torno da origem, pois tomando a curva $\gamma(t) = (t,t)$ temos que:

$$\lim_{t\to 0} G(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{2t^2\sqrt{2}|t|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t}{2\sqrt{2}|t|}$$

Desse modo, quando $t > 0$ temos que o limite vale $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ e quando $t < 0$ temos que o limite vale $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Portanto, não existe o limite e assim segue que f não é diferenciável na origem.

Exercício 1.2. *Mostre que a função f dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem.
Dica: Mostre que as derivadas parciais são contínuas na origem
Solução:
Temos que as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Desse modo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + 4x\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

perceba que
$x^4 \leq x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \Rightarrow x^4 \leq (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 0 < \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 1$
$x^2y^2 \leq x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \Rightarrow x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 0 < \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \leq 1$
desse modo, temos uma soma de produtos onde em cada produto temos um termo que vai para zero e outro que é limitado, portanto

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + 4x\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

De maneira análoga segue para a derivada em relação a y.
Logo, as derivadas parciais são contínuas e assim f é diferenciável.

Exercício 1.3. *Seja $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$, determine:*

(a) *O plano tangente em $(2, 2, f(2,2))$*

(b) A reta normal ao gráfico da função em $(2, 2, f(2, 2))$

(c) O vetor gradiente da f em $(2, 2)$

Solução:

(a) Primeiramente, calculemos as derivadas parciais em $(2, 2)$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2-y^2} + 2x^2 e^{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = 1 + 8 = 9$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xye^{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = -8$$

Logo, o plano tangente é dado por:

$$z = 2 + 9(x - 2) - 8(y - 2)$$

Ou equivalentemente

$$z - 9x + 8y = 0$$

(b) A reta normal é dada por:

$$(x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(9, -8, -1)$$

(c) O vetor gradiente da f em $(2, 2)$ *é dado por:*

$$\nabla f(2, 2) = (9, -8)$$