Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios Resolvidos - 09/04/2016

Cálculo 3 - Ciências da Computação

Professor:
Vinícius F. Wasques
viniwasques@hotmail.com

9 de abril de 2016

1 Exercícios :

Exercício 1.1. *(a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida abaixo:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Essa função é contínua na origem?

Solução:

Lembrando que, para a função f ser contínua no ponto $(0,0)$, ela deve estar definida nesse ponto, deve existir o limite no ponto e mais, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Desse modo, temos que a função dada não é contínua na origem, pois mesmo que ela esteja definida no ponto, temos que não existe o limite da função, isto é, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

De fato, tomando-se as curvas $\gamma_1(t) = (t,t)$ e $\gamma_2(t) = (t,0)$ temos que:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{2t^2} = 0$$

Enquanto que,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

Portanto, não existe o limite da função no ponto, e assim segue o resultado.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida abaixo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Essa função é contínua na origem?

Solução: *Sim, a função é contínua na origem. Perceba que a função é definida no ponto e mais, existe o limite da função. Portanto basta verificar a última condição, isto é, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Pois bem,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x-y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x - y = 0$$

Por outro lado, temos por definição da função f que, $f(0,0) = 0$ logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Concluindo assim a continuidade da função.

Exercício 1.2. *Calcule as derivadas parciais de* $1^{\underline{a}}$ *ordem, através de limite, das seguintes funções:*

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{x^2 + (y+\Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{x^2 + y^2 + 2y(\Delta y) + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{2y(\Delta y) + (\Delta y)^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} 2y + \Delta y = 2y$$

(b) $f(x, y, z) = xyz$

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)yz - xyz}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{xyz + \Delta xyz - xyz}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta xyz}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} yz = yz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y+\Delta y)z - xyz}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{xyz + x\Delta yz - xyz}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x\Delta yz}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} xz = xz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{xy(z+\Delta z) - xyz}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{xyz + xy\Delta z - xyz}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{xy\Delta z}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} xy = xy
\end{aligned}$$

Exercício 1.3. *Calcule as derivas de* $1^{\underline{a}}$ *ordem das seguintes funções:*

(a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2+y^2)-(x^3+y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(x^2+y^2)-(x^3+y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2yx^2+2y^3-2yx^3-2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2yx^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

(b) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}$$

Exercício 1.4. *Seja* $f(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$. *Mostre que*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -f$$

Solução:

Primeiro calculemos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+z^2-x(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-x(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Desse modo, temos que:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= x\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + y\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} + z\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{-x^3+xy^2+xz^2-2xy^2-2xz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{-x^3-xy^2-xz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= -x\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= -\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= -f$$

E assim segue o resultado.