Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios Resolvidos - 02/04/2016

Cálculo 3 - Ciências da Computação

Professor:
Vinícius F. Wasques
viniwasques@hotmail.com

2 de abril de 2016

1 Exercícios :

Exercício 1.1. *Verifique se existem os limites:*

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Solução:

Tomando as curvas $\gamma_1(t) = (t, t)$ *e* $\gamma_2(t) = (t, -t)$ *obtemos:*

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, não existe o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Solução:

Tomando as curvas $\gamma_1(t) = (0, t)$ *e* $\gamma_2(t) = (t, 0)$ *obtemos:*

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

Portanto, não existe o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Solução:

Tomando a curva $\gamma_1(t) = (t, 0)$ *obtemos:*

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|}$$

Calculando esse limite com t *tentendo a* 0, *à direita, temos que*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1$$

Por outro lado, calculando o limite com t *tentendo a* 0, *à esquerda, temos que*

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{-t} = \lim_{t\to 0^-} -1 = -1$$

Portanto, não existe o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *pois nem sequer existe o limite* $\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t))$.

Observação 1.1. *As curvas tomadas para comprovar que não existe o limite dessas funções não precisam ser necessariamente essas apresentadas aqui, podemos tomar qualquer curva que satisfaça as hipóteses do teorema, isto é, elas devem ser contínuas no ponto que esta sendo analisado.*

Exercício 1.2. *Calcule o limite abaixo:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

Solução:

Utilizando coordenadas polares obtemos a seguinte substituição: (para aqueles que não lembram, ou até mesmo que nunca viram, e queiram saber mais sobre o assunto consultem o livro "Cálculo A - Flemming e Gonçalves" e passem em minha sala para sanar eventuais dúvidas)

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsen(\theta) \end{cases}$$

Desse modo, obtemos $x^2+y^2 = r^2cos^2(\theta) + r^2sen^2(\theta) = r^2(cos^2(\theta) + sen^2(\theta)) = r^2$.

Quando fazemos o limite de (x,y) *tendendo a* $(0,0)$ *estamos calculando* $x \longrightarrow 0$ *e* $y \longrightarrow 0$, *como as funções cosseno e seno não se anulam ao mesmo tempo, então calcular esse limite é equivalente a calcular o limite abaixo:*

$$\lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2)}{r^2}$$

Desse modo,

$$\lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2)}{r^2} = \frac{0}{0}$$

Utilizando a regra L'Hopital obtemos:

$$\lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2rcos(r^2)}{2r} = \lim_{r\to 0} cos(r^2) = 1$$

Exercício 1.3. *Seja* $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$, *considere as curvas* $\gamma(t) = (at, bt)$ *e* $\delta(t) = (t^2, t)$. *Mostre que*

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\delta(t)) = 1$$

concluindo assim que não existe esse limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
Solução:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \frac{2atb^2t^2}{a^2t^2 + b^4t^4}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2atb^2t^2}{t^2(a^2 + b^4t^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2atb^2}{a^2 + b^4t^2} = \frac{0}{a^2} = 0$$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to 0} f(\delta(t)) = \frac{2t^2t^2}{t^4 + t^4}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t^4}{2t^4}$$

$$= \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

Portanto, não existe o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.