Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios Resolvidos - 19/03/2016

Cálculo 3 - Ciências da Computação

Professor:
Vinícius F. Wasques
viniwasques@hotmail.com

19 de março de 2016

1 Exercícios - 12/03/2016

Exercício 1.1. *Sejam $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Mostre que:*

$$\frac{d(F \wedge G)}{dt} = \frac{dF}{dt} \wedge G + F \wedge \frac{dG}{dt}$$

Solução:
Mostremos calculando o seguinte limite:

$$\frac{d(F \wedge G)}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) \wedge G(t) - F(t_0) \wedge G(t_0)}{t - t_0}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) \wedge G(t) - F(t) \wedge G(t_0) + F(t) \wedge G(t_0) - F(t_0) \wedge G(t_0)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \left(\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \wedge G(t_0) + F(t) \wedge \frac{G(t) - G(t_0)}{t - t_0} \right)$$

$$= \frac{dF}{dt}(t_0) \wedge G(t_0) + F(t_0) \wedge \frac{dG}{dt}(t_0)$$

$*$ *Somou-se e subtraiu-se o termo $F(t) \wedge G(t_0)$.*

Observação 1.1. *Se já soubermos que tal limite existe, basta calcularmos cada lado da igualdade para comprovar a veracidade do resultado, assim como falamos em sala. Mas perceba que calculando o limite, verificamos as duas condições de uma só vez.*

Exercício 1.2. *Um ponto se move no espaço de modo que* $||v|| = k$*, onde* k *é constante. Mostre que* $v.a = 0$ *onde* a *representa a aceleração do ponto e* v *representa a velocidade deste ponto. Interprete Geometricamente.*

Solução:

Como $v = (v_1, v_2, v_3)$ *é a velocidade do ponto do espaço e temos que* $||v|| = k$ *então* $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = k$ *que geometricamente é uma esfera de centro na origem e raio k. Temos também que a aceleração é a derivada da velocidade e portanto a aceleração é um vetor tangente a velocidade no ponto* $v(t)$ *e assim* a *e* v *são ortogonais conluindo o resultado. Algebricamente temos que:*

$$||v|| = k \iff \sqrt{v.v} = k \iff v.v = k^2$$

Derivando em ambos os lados da igualdade em relação a t, temos:

$$\frac{dv}{dt}.v + v.\frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow 2\left(\frac{dv}{dt}.v\right) = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{dt}.v = 0$$

Como $a = \frac{dv}{dt}$ *então segue o resultado.*

Exercício 1.3. *Sejam $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Mostre que a função $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $H(t) = F(u(t))$ é diferenciável e mais*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dF}{du} . \frac{du}{dt}$$

Solução:

$$\frac{dH}{dt} = \lim_{t \to t_0} \frac{H(t) - H(t_0)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{F(u(t)) - F(u(t_0))}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(F_1(u(t)) - F_1(u(t_0)), F_2(u(t)) - F_2(u(t_0)), F_3(u(t)) - F_3(u(t_0)))}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \left(\frac{(F_1(u(t)) - F_1(u(t_0)), F_2(u(t)) - F_2(u(t_0)), F_3(u(t)) - F_3(u(t_0)))}{t - t_0} \right) \left(\frac{u(t) - u(t_0)}{u(t) - u(t_0)} \right)$$

$$= \lim_{t \to t_0} \left(\frac{(F_1(u(t)) - F_1(u(t_0)), F_2(u(t)) - F_2(u(t_0)), F_3(u(t)) - F_3(u(t_0)))}{u(t) - u(t_0)} \right) \left(\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \right)$$

$$= \lim_{t \to t_0} \left(\frac{F_1(u(t)) - F_1(u(t_0))}{u(t) - u(t_0)}, \frac{F_2(u(t)) - F_2(u(t_0))}{u(t) - u(t_0)}, \frac{F_3(u(t)) - F_3(u(t_0))}{u(t) - u(t_0)} \right) \left(\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \right)$$

$$= \left(\frac{dF_1}{du}, \frac{dF_2}{du}, \frac{dF_3}{du} \right) . \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{dF}{du} \frac{du}{dt}$$

Exercício 1.4. *Calcule o comprimento das curvas:*

(a) $\gamma(t) = (2cost, 2sent)$ *com* $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\gamma(t) = (1, ln(t))$ *com* $t \in [1, e]$.

Solução:

(a) $\gamma'(t) = (-2sent, 2cost) \Longrightarrow ||\gamma'(t)|| = \sqrt{4sen^2t + 4cos^2t} = 2$. *Logo,*

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi$$

(b) $\gamma'(t) = (1, ln(t)) \Longrightarrow ||\gamma'(t)|| = \sqrt{0 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t}$. *Logo,*

$$L(\gamma) = \int_1^e \frac{1}{t}dt = ln(e) - ln(1) = 1 - 0 = 1$$