Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios Resolvidos - 12/03/2016

Cálculo 3 - Ciências da Computação

Professor:
Vinícius F. Wasques
viniwasques@hotmail.com

13 de março de 2016

1 Exercícios - 12/03/2016

Exercício 1.1. *Sejam* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *e* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tais que*

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = a \qquad \lim_{t \to t_0} G(t) = b$$

onde,
$F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$
$G(t) = (G_1(t), G_2(t), G_3(t))$
$a = (a_1, a_2, a_3)$
$b = (b_1, b_2, b_3)$.
Mostre que

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} F(t) \wedge G(t) = a \wedge b$$

Solução:
Como

$$F(t) \wedge G(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix}$$

$$= (F_2(t)G_3(t) - F_3(t)G_2(t), F_3(t)G_1(t) - F_1(t)G_3(t), F_1(t)G_2(t) - F_2(t)G_1(t))$$

então

$$\lim_{t \to t_0} F(t) \wedge G(t) = \lim_{t \to t_0} (F_2(t)G_3(t) - F_3(t)G_2(t), F_3(t)G_1(t) - F_1(t)G_3(t), F_1(t)G_2(t) - F_2(t)G_1(t))$$

$$= (\lim_{t \to t_0} F_2(t)G_3(t) - F_3(t)G_2(t), \lim_{t \to t_0} F_3(t)G_1(t) - F_1(t)G_3(t), \lim_{t \to t_0} F_1(t)G_2(t) - F_2(t)G_1(t))$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

por outro lado,

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

logo segue a igualdade.

Exercício 1.2. *Calcule os seguintes limites:*

1. $\lim_{t\to 1} F(t)$ *onde* $F(t) = \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \frac{t^2-1}{t-1}\right)$

   Solução:

$$\lim_{t\to 1} F(t) = \left(\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, \lim_{t\to 1} t^2, \lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1}\right)$$

   primeira coordenada

$$\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)}{(t-1)(\sqrt{t}+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(\sqrt{t}+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{\sqrt{t}+1} = \frac{1}{2}$$

   segunda coordenada

$$\lim_{t\to 1} t^2 = 1$$

   terceira coordenada

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} t+1 = 2$$

   Portanto

$$\lim_{t\to 1} F(t) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$$

2. $\lim_{t\to 2} F(t)$ *onde* $F(t) = \left(\frac{t^2-4t+4}{t^2-4}, \frac{cos(\frac{\pi}{t})}{t-2}, 2t\right)$

   Solução:

$$\lim_{t\to 2} F(t) = \left(\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4t+4}{t^2-4}, \lim_{t\to 2}\frac{cos(\frac{\pi}{t})}{t-2}, \lim_{t\to 2} 2t\right)$$

   primeira coordenada

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4t+4}{t^2-4} = \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)^2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t+2} = 0$$

   segunda coordenada

   Na segunda coordenada temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$*, desse modo utilizando a regra de L'Hopital temos:*

$$\lim_{t\to 2}\frac{cos(\frac{\pi}{t})}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{\pi}{4}sen(\frac{\pi}{t})=\frac{\pi}{4}$$

terceira coordenada

$$\lim_{t\to 2}2t=4$$

Portanto

$$\lim_{t\to 2}F(t)=\left(0,\frac{\pi}{4},4\right)$$

Exercício 1.3. *Determine o conjunto de pontos onde a função* $F(t)=(\sqrt{t-1},\sqrt{t+1},e^t)$ *é contínua.*

Solução:

Para que a função $F(t)$ *seja contínua então cada função componente deve ser contínua, desse modo temos que* $\sqrt{t-1}$ *é contínua em todo intervalo* $[1,+\infty)$*, enquanto que* $\sqrt{t+1}$ *é contínua no intervalo* $[-1,+\infty)$ *e* e^t *é contínua em todo o conjunto* $\mathbb{R}$*. Logo,* $F(t)$ *será contínua na intersecção dos três intervalos, isto é, o conjunto de pontos onde* $F(t)$ *é contínua é dado por:*

$$\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}$$