Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios Resolvidos - 04/06/2016

Cálculo 3 - Ciências da Computação

Professor:
Vinícius F. Wasques
viniwasques@hotmail.com

4 de junho de 2016

1 Exercícios :

Exercício 1.1. *Determine* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$ *utilizando o teorema do valor médio sendo que* $f(x,y) = x^2 + 6y$, $P_0 = (1,1)$ *e* $P_1 = (2,3)$

Solução:

Pelo teorema do valor médio temos que:

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\overline{P})(P_1 - P_0)$$

$$\Rightarrow 22 - 7 = (2\overline{x}, 6)(1,2)$$

$$\Rightarrow 15 = 2\overline{x} + 12$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{3}{2}$$

Como o teorema do valor médio esta sendo aplicado no segmento P_0P_1 *e* $\overline{P}$ *é um ponto interno a esse segmento então temos que:*

$$\overline{P} = P_0 + \lambda(P_1 - P_0), \ \ \lambda \in (0,1)$$

Isto é,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (1,1) + \lambda(1,2)$$

$$\Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda)$$

$$\begin{cases} \overline{x} = 1 + \lambda \\ \overline{y} = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Como $\overline{x} = \frac{3}{2}$ *obtemos da primeira equação que* $\lambda = \frac{1}{2}$, *e assim substituindo na segunda equação obtemos que* $\overline{y} = 2$. *Logo, o ponto* $\overline{P} = (\frac{3}{2}, 2)$.

Exercício 1.2. *Verifique se o sistema abaixo satisfaz a condição* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. *Se sim, verifique se existe solução e determine-o.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2y^2 - 10x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^3y + 1 \end{cases}$$

Solução:

Primeiro, vejamos se a condição é satisfeita:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 18x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Agora, integrando a primeira equação em relação a x temos que:

$$f(x,y) = 3x^3y^2 - 5x^2 + c_1, \ \ com \ \ c_1 \ \ constante$$

Analogamente, integrando a segunda equação em relação a y temos:

$$f(x,y) = 3x^3y^2 + y + c_2, \ \ com \ \ c_2 \ \ constante$$

Desse modo, as funções soluções que resolvem esse sistema são dados por:

$$f(x,y) = 3x^3y^2 - 5x^2 + y + k, \ \ com \ \ k \ \ constante$$

Perceba que essa função satisfaz as condições do sistema e ainda mais, para cada valor da constante k obtemos uma diferente função, isso nos diz que existe uma família de soluções para esse sistema.

Exercício 1.3. *Determine os possíveis pontos de máximo, mínimo e sela para a seguinte função:*

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$$

Solução:
Encontremos primeiro os pontos críticos, para isso calculemos o seguinte:

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (2x + 3y - 6, 3x + 8y + 2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 3x + 8y + 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que o único ponto crítico é dado por $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$
Desse modo, encontremos o Hessiano da função f, que é dado por:

$$H\left(\tfrac{54}{7}, -\tfrac{22}{7}\right) = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 16 - 9 = 7 > 0$$

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right) = 2 > 0$ *então segue que* $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$ *é um ponto de mínimo local.*