Operações Aritméticas Fuzzy com interatividade

Interatividade x não interatividade

A motivação para definir a relação fuzzy de interatividade vem da ideia de estabelecer uma noção similar a noção de dependência para variáveis aleatórias.

Na probabilidade o conceito de dependência é estudado a partir de distribuições de probabilidade.

Dizemos que dois números fuzzy A e B são interativos se a função de pertinência φ_A interferir na função de pertinência φ_B, ou vice-versa.

O conceito de interatividade é similar, porém não equivalente, a relação de dependência para variáveis aleatórias.

Por consequência dizemos que A e B são não-interativos se a função de pertinência de um não interfere a pertinência do outro. Essa ideia é similar a noção de independência para variáveis aleatórias.

Exemplo: Vamos tomar como exemplo um modelo SI, que se trata de um modelo epidemiológico dividindo a população P em dois compartimentos: suscetível (S) e infectado (I).

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta} \boxed{I}$$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = -\beta S I + \beta S I$$

$$= 0$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(\underbrace{S+I}_{P}) = \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow$$ População é constante.

$$S + I = \boxed{P = \text{constante}}$$

$$\boxed{S + I = 100 \text{ milhões}}$$

Vejam que o valor de I depende do valor de S. Isso justifica uma dependência entre as variáveis.

Onde entra o fuzzy?

$$S + I = 10$$

Note que determinar o número exato de infectados/suscetíveis é inviável (possível ?).

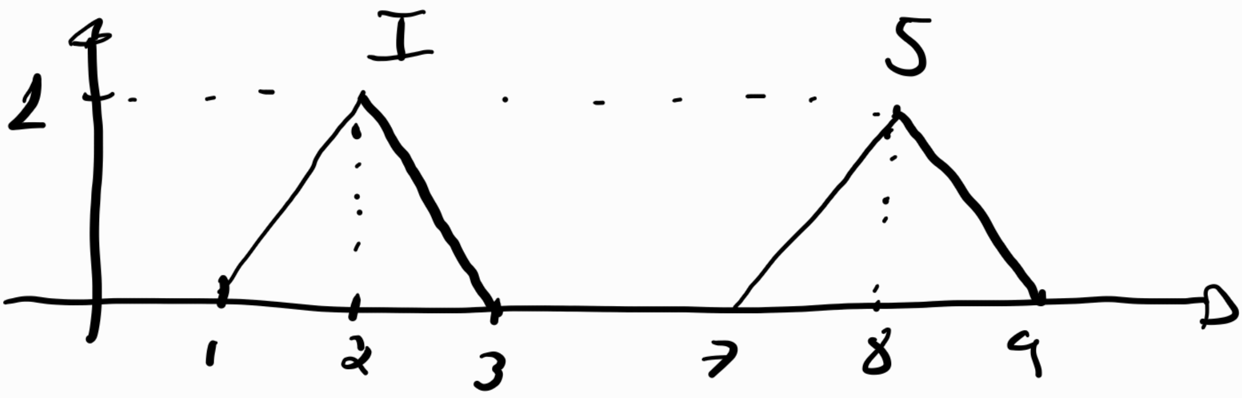
Assim, faz sentido considerar

uma incerteza em torno desses valores. Por exemplo, se temos "em torno" de 2 infectados, então temos "em torno" de 8 suscetíveis.

Vamos tentar modelar esse problema usando a aritméti-ca da aula anterior.

Considere $I = (\underline{1; 2; 3})$ e

$S = (\underline{7}; 8; \underline{9})$



$$S + I \overset{?}{=} 10$$

$$(7;8;9) + (1;2;3) = \boxed{(8;10;12)}$$

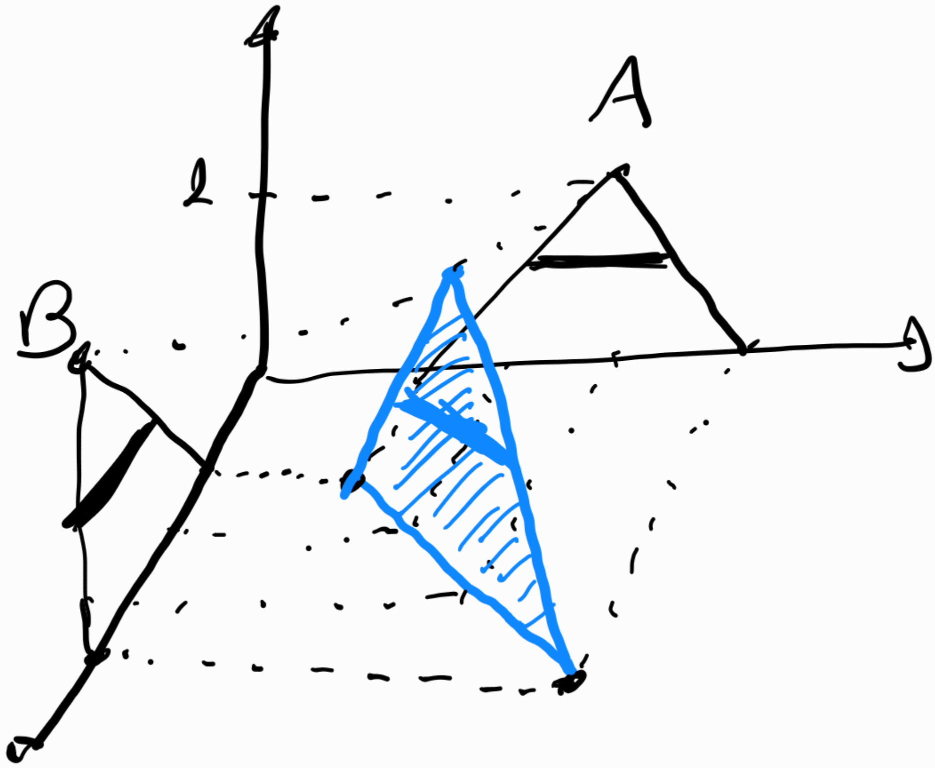
Essa modelagem, embora esteja incorporando incerteza, resulta em uma incompatibilidade no resultado final, pois o número de indivíduos é exatamente definido.

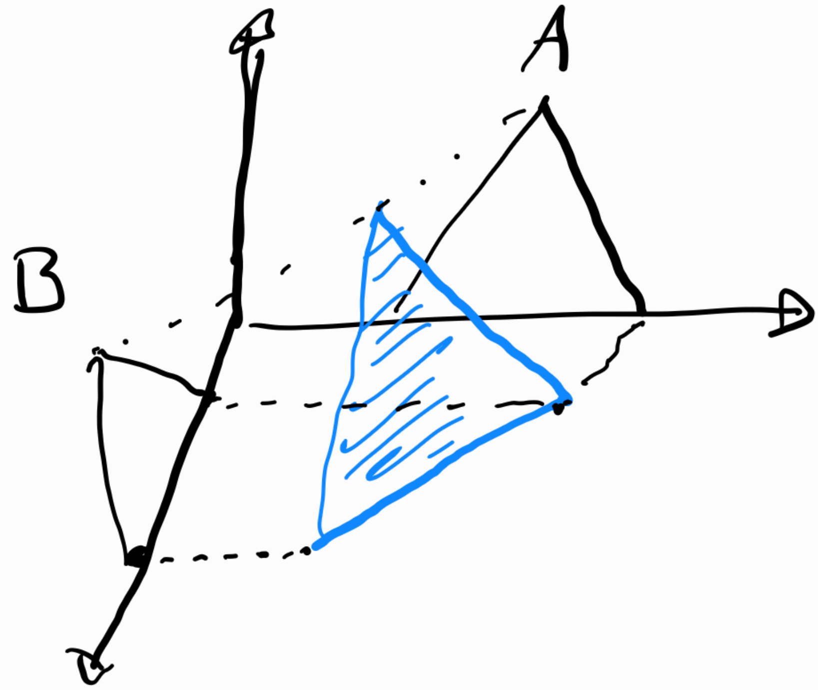
A soma usual que vimos na última aula não contempla a relação de interatividade presente no problema.

Para contemplar a relação de interatividade no problema vamos falar sobre a relação fuzzy de interatividade linear

Dizemos que dois números fuzzy são linearmente interativos (ou linearmente correlacionados) se suas funções de pertinência estão associadas de acordo com uma reta.

Geometricamente, temos:





Do ponto de vista algebrico:

$$\boxed{B = \underline{\underline{q}} \cdot A + \underline{\underline{r}}} \quad , \quad q \neq 0$$

Exemplo: $A = (1; 2; 3)$ e $B = (\underline{2}; \underline{4}; \underline{6})$ são linearmente interativos? Sim! Note que

$$B = 2 \cdot (1; 2; 3) = 2 \cdot A$$

$q = 2$ e $r = 0$

$A = (1; 2; 3)$ e $B = (3; 5; 7)$

$$\begin{aligned} B &= 2\,(1; 2; 3) + 1 \\ &= (2; 4; 6) + 1 \\ &= (3; 5; 7) \end{aligned}$$

$B = 2A + 1 \Rightarrow q = 2$ e $r = 1$

$A = (1;2;3)$ e $B = (1;2;4)$

não são linearmente interativos pois não existem q e r que leve A em B por meio de uma única reta.

Legal! Mas como somamos esses números fuzzy levando em consideração a interatividade linear?

$$A +_L B = ?$$

↳ a soma interativa linear

$$A +_L B = A +_L (qA + r)$$

$$= (1+q)A + r$$

Antes de fazer conta, note que:

$A = (1; 2; 3)$ e $\boxed{B = (2; 4; 6)}$

são linearmente (positivamente) interativos, pois $B = 2A + 0$

$\hookrightarrow > 0$

$\boxed{\begin{array}{l} q = 2 \\ r = 0 \end{array}}$

$B = qA + r$

$= -2A + r$

$= \boxed{(-6; -4, -2)} + r$

Tomando $r = 8$, temos:

$B = (-6; -4; -2) + 8$

$= (2; 4; 6)$

$B = q A + r \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} q = -2 \\ r = 8 \end{matrix}}$ e

Retomando ao exemplo de epidemiologia:

$S + I = 10$ ✗

↳ soma usual

$S \overset{+}{+_L} I \overset{?}{=} 10$

Tomando $S = (7; 8; 9)$ e

$I = (1; 2; 3)$

$S = q I + r$?

Para $q > 0$ temos:

$$\boxed{q = 1 \text{ e } r = 6}$$

$$(7; 8; 9) = 1 \cdot (1; 2; 3) + 6$$

$$= (1; 2; 3) + 6$$

$$= (7; 8; 9)$$

Para $q < 0$, temos:

$S = (7; 8; 9)$ e $I = (1; 2; 3)$

$$\boxed{q = -1 \quad \text{e} \quad r = 10}$$

$$(7; 8; 9) = -1 \cdot (1; 2; 3) + 10$$

$$= (-3; -2; -1) + 10$$

$$= (7; 8; 9)$$

Retomando o problema:

$$S +_L I \overset{?}{=} 10$$

$$S +_L I = qI + r +_L I$$

$$= I(q+1) + r$$

Para $q > 0$, temos: $q = 1$ e $r = 6$

$$S +_L I = \underline{\overbrace{(1;2;3)}^{I} \cdot (q+1) + r}$$

$$= (1;2;3) \cdot (1+1) + 6$$

$$= (1;2;3) \cdot 2 + 6$$

$$= (2;4;6) + 6$$

$$= \boxed{(8;10;12)}$$

Para $q < 0$, $q = -1$ e $r = 10$

$$S_{t_2} I = I(1+q) + r$$

$$= (1;2;3)(1-1) + 10$$

$$= (1;2;3) \cdot 0 + 10$$

$$= (0;0;0) + 10$$

$$= 0 + 10$$

$$= 10$$