Operações aritméticas usuais para números fuzzy.

Hoje vamos tratar de operações aritméticas entre números fuzzy da perspectiva pessimista. (propaga incerteza).

Para isso vamos definir as operações a partir da Teoria intervalar aplicado aos α-níveis dos números fuzzy.

Um intervalo é definido da seguinte forma:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Como somamos intervalos?

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$

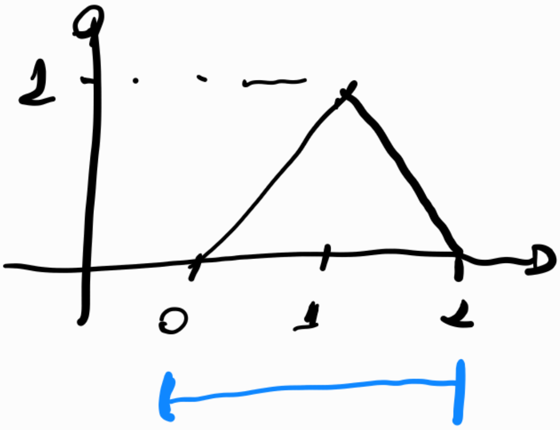
Exemplo:

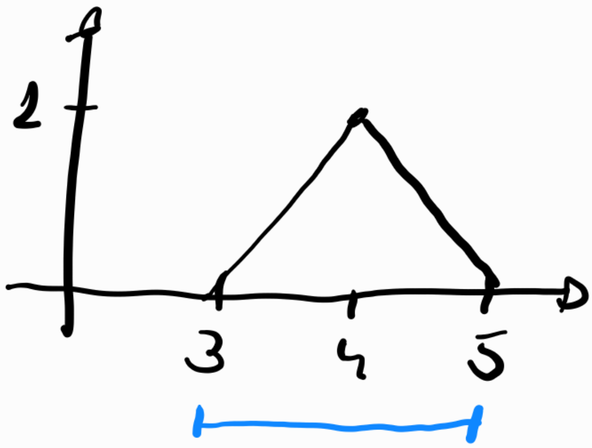
$$[0,1]+[3,4]=[0+3,1+4]$$
$$=[3,5]$$

Para o caso fuzzy, considere

$$A=(0;1;2) \quad e \quad B=(3;4;5)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$





$$[A]^\alpha=[0+\alpha(1-0),2+\alpha(1-2)]$$
$$[B]^\alpha=[3+\alpha(4-3),5+\alpha(4-5)]$$

Simplificando:

$$[A]^\alpha = \boxed{[\alpha, 2-\alpha]}$$

em torno de 1

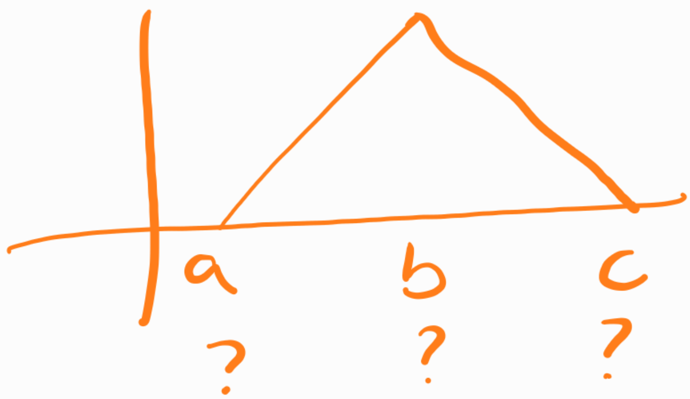
$$[B]^\alpha = \boxed{[3+\alpha, 5-\alpha]}$$

em torno de 4

$$[A]^\alpha + [B]^\alpha = [\alpha, 2-\alpha] + [3+\alpha, 5-\alpha]$$

$$= [\alpha + 3 + \alpha, 2 - \alpha + 5 - \alpha]$$

$$\boxed{= [3 + 2\alpha, 7 - 2\alpha]}$$



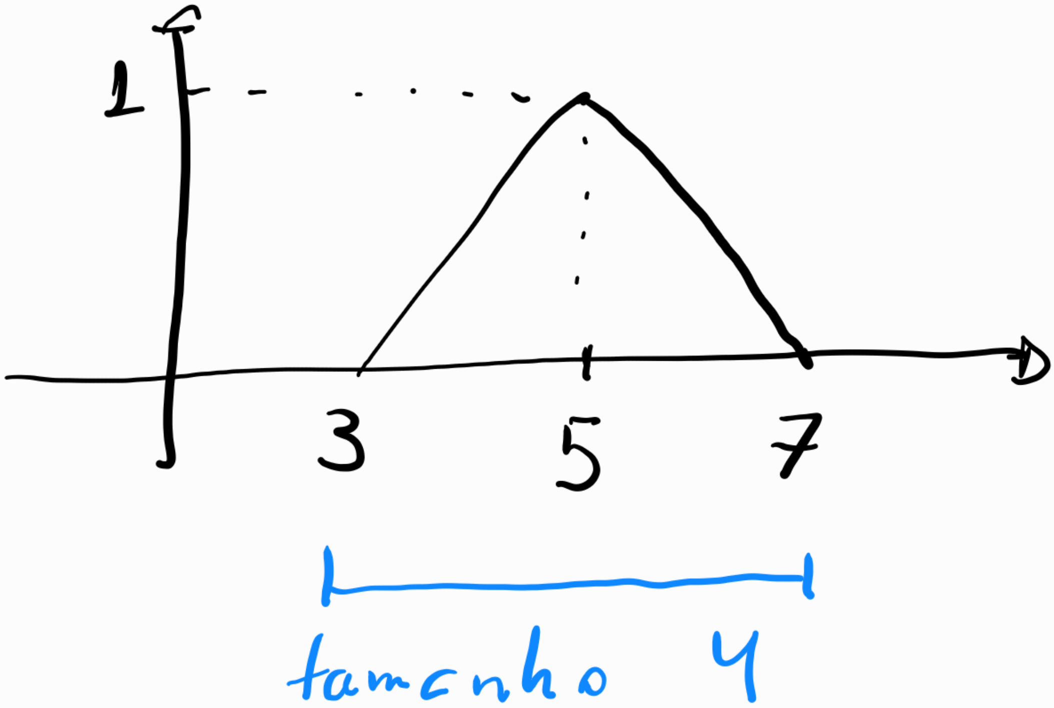
Note que que se $\alpha = 1$,

então $[A]^1 + [B]^1 = [3 + 2(1), 7 - 2(1)]$

$= [5, 5]$.

Para $\alpha = 0$, temos:

$$[A]^0 + [B]^0 = [3 + \alpha(0), 7 - 2(0)]$$
$$= [3, 7]$$



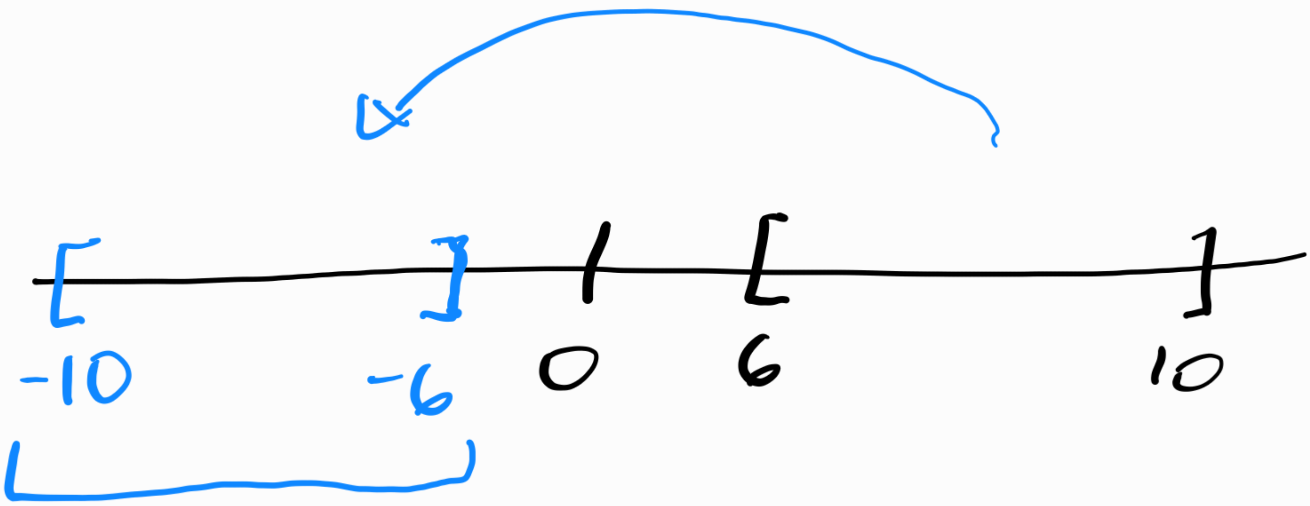
Definimos a multiplicação de um número real por um intervalo da seguinte forma:

$\lambda \in \mathbb{R}$ e $[a, b]$

$$\lambda [a, b] = \begin{cases} [\lambda a, \lambda b], & \lambda \geq 0 \\ [\lambda b, \lambda a], & \lambda < 0 \end{cases}$$

Exemplo: $2 \cdot [3,5] = [2 \cdot 3, 2 \cdot 5]$
$= [6, 10]$

$(-2) \cdot [3,5] = [-2 \cdot 5, -2 \cdot 3]$
$= [-10, -6]$



Assim, definimos a subtração entre números fuzzy da seguinte forma:

$$[A]^\alpha - [B]^\alpha = [A]^\alpha + \left(-[B]^\alpha\right)$$

Ou seja, Se $[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]$

e $[B]^\alpha = [b_-^\alpha, b_+^\alpha]$ então

$$[A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha] + [-[b_-^\alpha, b_+^\alpha]]$$

$$= [a_-^\alpha, a_+^\alpha] + [-b_+^\alpha, -b_-^\alpha]$$

$$= [a_-^\alpha - b_+^\alpha, a_+^\alpha - b_-^\alpha]$$

Exemplo:

$[A]^\alpha = [\alpha, 2-\alpha]$ em torno de 1

$[B]^\alpha = [3+\alpha, 5-\alpha]$ em torno de 4

Assim, $[A]^\alpha - [B]^\alpha =$

$$[\alpha, 2-\alpha] + (-[3+\alpha, 5-\alpha])$$

$$= [\alpha, 2-\alpha] + [-5+\alpha, -3-\alpha]$$

$$= [-5+2\alpha, -1-2\alpha]$$

Note que para $\alpha = 1$, temos:

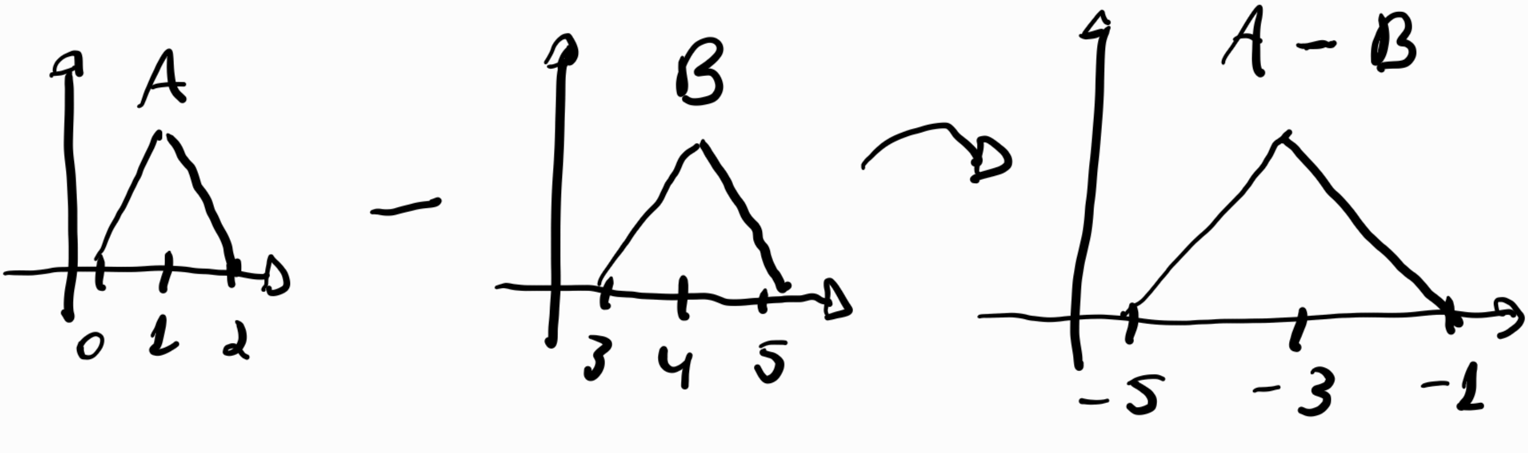
$$[-5+2(1), -1-2(1)] =$$

$$= [-3, -3]$$

Note que para $\alpha = 0$, temos:

$$[-5+2(0), -1-2(0)] =$$

$$= [-5, -1]$$

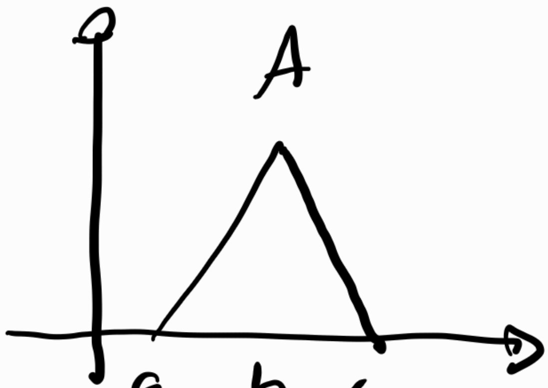


Para a multiplicação, temos:

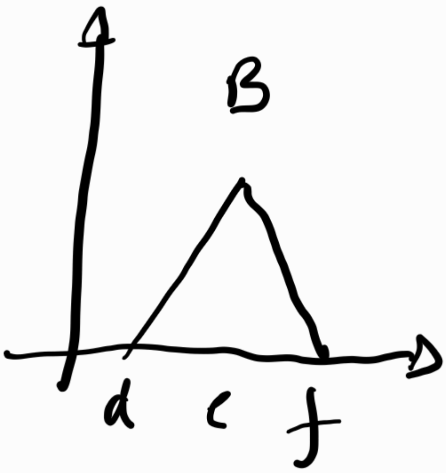
$$[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha] \quad e \quad [B]^\alpha = [b_-^\alpha, b_+^\alpha]$$

$$[A]^\alpha * [B]^\alpha =$$

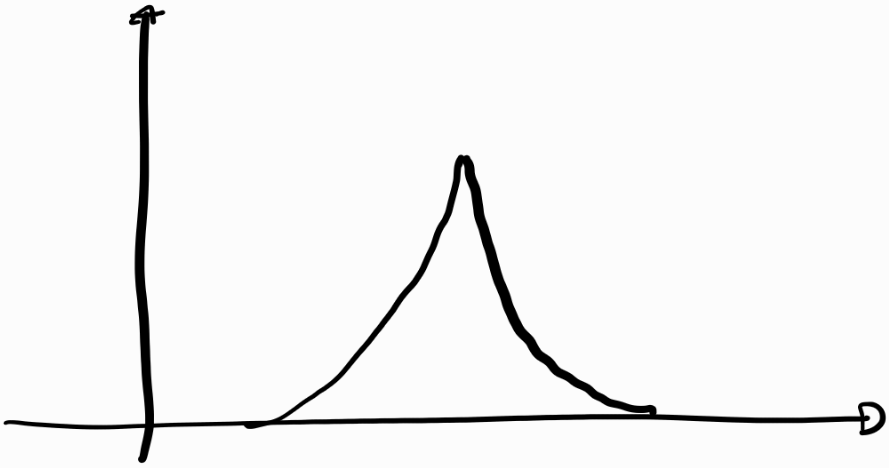
$$\Big[\min\{a_-^\alpha \cdot b_-^\alpha,\ a_-^\alpha \cdot b_+^\alpha,\ a_+^\alpha \cdot b_-^\alpha,\ a_+^\alpha \cdot b_+^\alpha\},$$
$$\max\{a_-^\alpha \cdot b_-^\alpha,\ a_-^\alpha \cdot b_+^\alpha,\ a_+^\alpha \cdot b_-^\alpha,\ a_+^\alpha \cdot b_+^\alpha\}\Big]$$



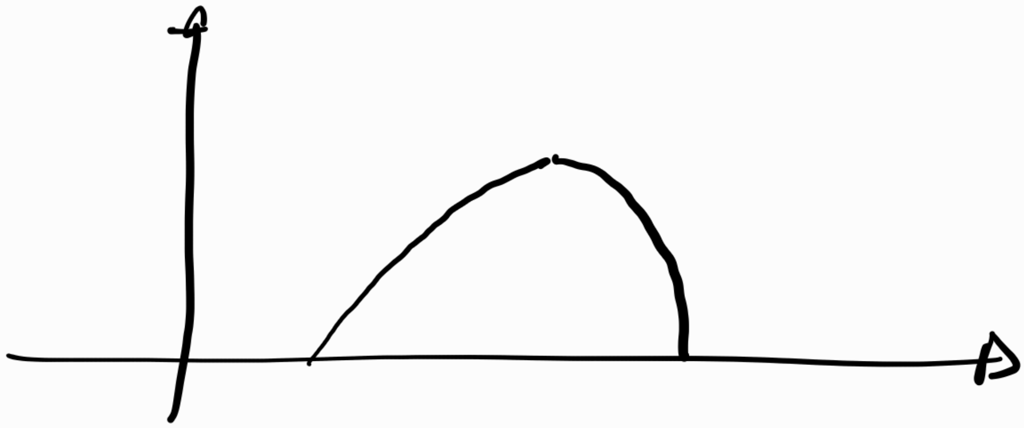
$*$



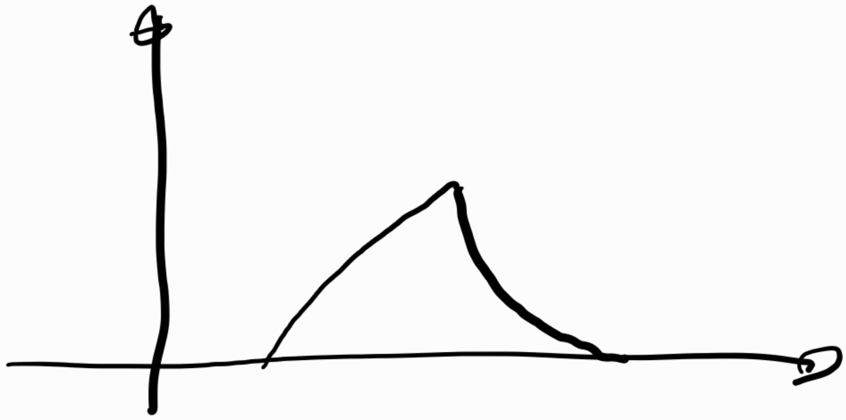
$=$



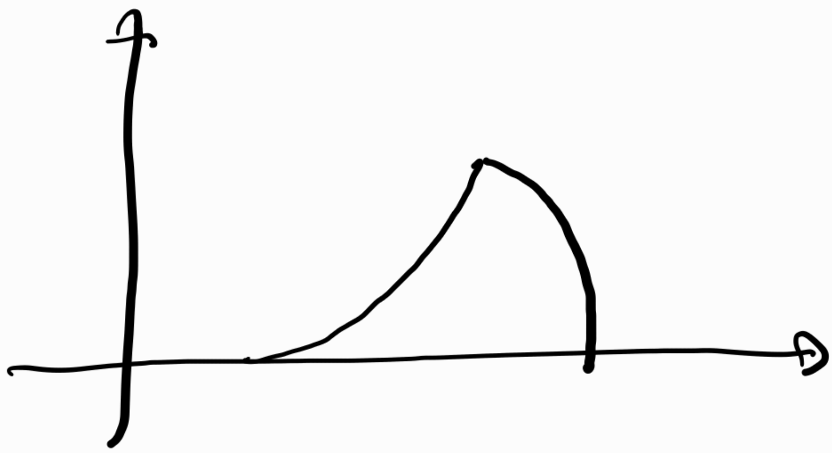
ou



ou



ou



Por fim, a divisão é definida por:

$$[A]^\alpha \div [B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot \left(\frac{1}{[B]^\alpha}\right)$$

$$= \left[\min\left\{\frac{a_-^\alpha}{b_-^\alpha}, \frac{a_-^\alpha}{b_+^\alpha}, \frac{a_+^\alpha}{b_-^\alpha}, \frac{a_+^\alpha}{b_+^\alpha}\right\},\right.$$

$$\left.\max\left\{\frac{a_-^\alpha}{b_-^\alpha}, \frac{a_-^\alpha}{b_+^\alpha}, \frac{a_+^\alpha}{b_-^\alpha}, \frac{a_+^\alpha}{b_+^\alpha}\right\}\right]$$

só é possível calcula se $0 \notin [B]^\alpha$.

É interessante observar que: $A - A \neq 0$ (em geral). No espaço dos números fuzzy essa intuição muda um pouco.

$$[A]^\alpha = [\alpha, d-\alpha]$$

$$[A]^\alpha - [A]^\alpha = [\alpha, d-\alpha] - [\alpha, d-\alpha]$$

$$= [\alpha, d-\alpha] + [-[\alpha, d-\alpha]]$$

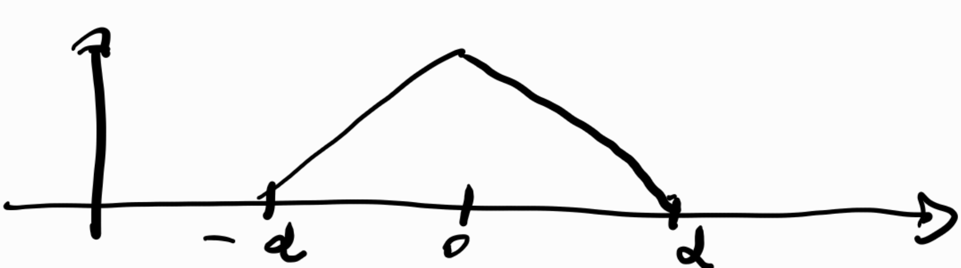
$$= [\alpha, d-\alpha] + [-d+\alpha, -\alpha]$$

$$= [\alpha - d + \alpha, d - d\alpha]$$

$$= [-d + d\alpha, d - d\alpha]$$

Se $\alpha = 1$, então $[-d + d.(1),$ $d - d(1)] = [0, 0]$

Se $\alpha = 0$, então $[-d + d(0),$ $d - d(0)] = [-d, d]$



De modo similar,

$$\frac{[A]^{e}}{[A]^{z}} \neq 1.$$