Lógica Fuzzy

Vamos caracteriza o seguinte conjunto:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : x > 5 \}$$
$$= (5, \infty)$$

Por outro lado, vamos deter-minar o conjunto B:

$$B = \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 0 \}$$
$$\stackrel{?}{=} (-0.1, 0.1)$$
$$\stackrel{?}{=} (-0.001, 0.001)$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ é grande} \}$$
$$\stackrel{?}{=} (1.0000, \infty)$$
$$\stackrel{?}{=} (1.00000000, \infty)$$

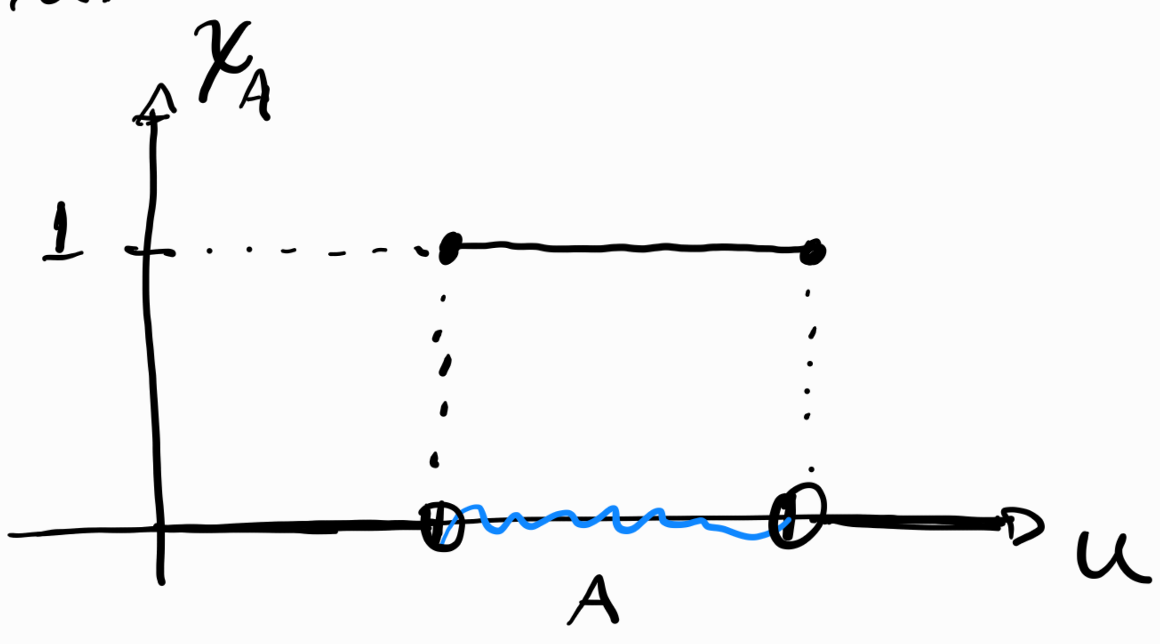
$\stackrel{?}{=} (0{,}001\,,\,0.002)$

Sabemos que um número real pode ser caracterizado por uma função característica (indicadora).

Seja A um conjunto clássico

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in A \\ 0\,, & x \notin A \end{cases}$$

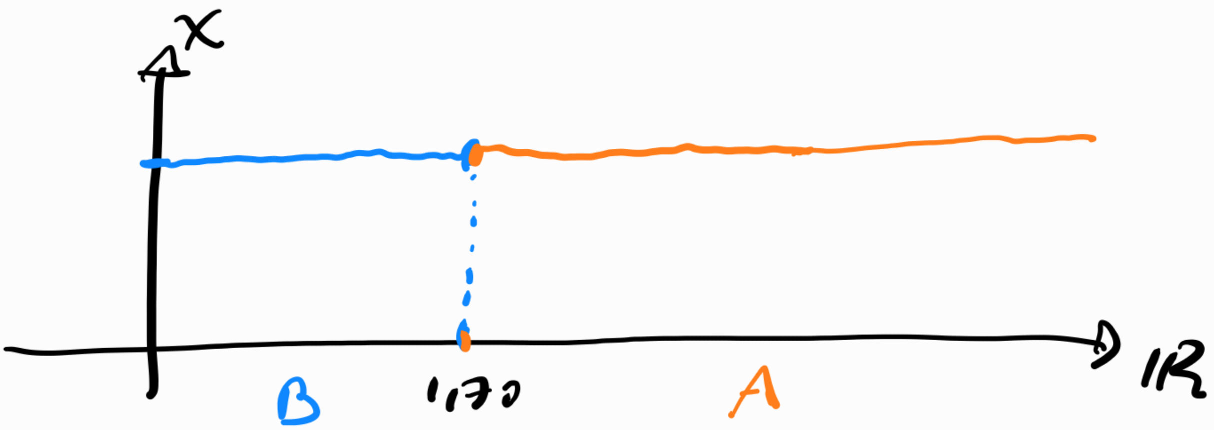
χ_A é chamada de função indicadora.



Considere A o conjunto de tamanho alto e B de tamanho baixo.

$A = [1.70, \infty)$

$B = [0, 1.70)$



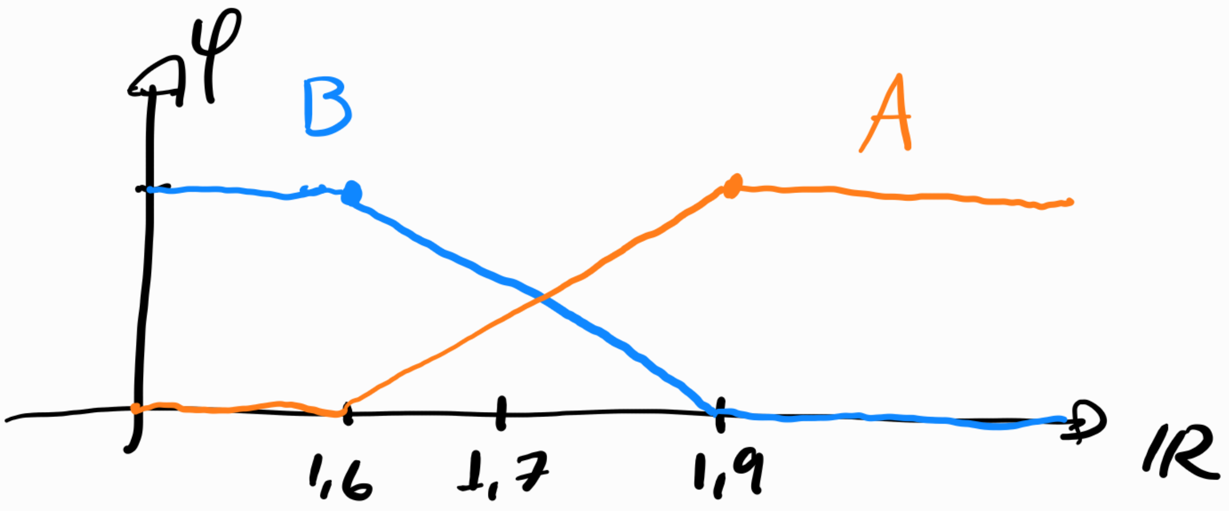
Enquanto a função indicadora tem como lei $\chi_A : U \to \{0,1\}$

Zadeh propõe um relaxamento dessa lei, chamada de função de pertinência:

$$\varphi_A : U \longrightarrow [0,1]$$

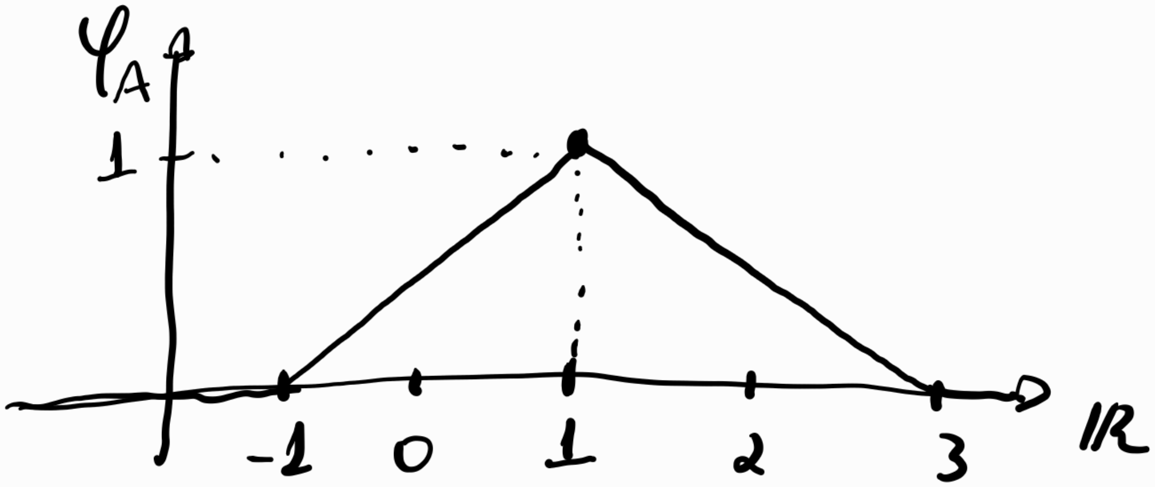
Essa função tem o seguinte significado: Quanto mais próximo de 1 for $\varphi_A(x)$ maior é a pertinência de x em A.

Retornando ao exemplo anterior,



Um conjunto fuzzy A de U é definido por sua função de pertinência φ_A.

Exemplo: $A = \{ x \in \mathbb{R} : x$ é próximo de $1 \}$



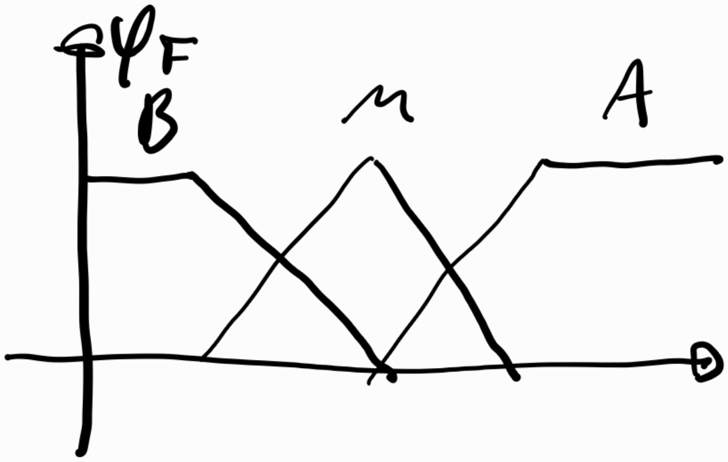
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, & x \in [-1,1) \\ \dfrac{-x+3}{2}, & x \in [1,3] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Também representamos um conjunto fuzzy por $A = (x, \varphi_A(x))$.

Exemplo: Diagnóstico médico

A = febre (baixa, média, alta)

B = dor no corpo (baixa, média, alta).



febre = x

Dor no corpo = y

Definimos a união entre conjuntos fuzzy A e B por:

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$$

Definimos a interseção entre conjuntos fuzzy A e B por:

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$$

Definimos o complementar de um conjunto A (denotado por A^c).

$$\varphi_{A^c}(x) = 1 - \varphi_A(x)$$

Note que a função de pertinência do conjunto universo U é dado por: $\varphi_U(x) = 1$, $\forall x \in U$.

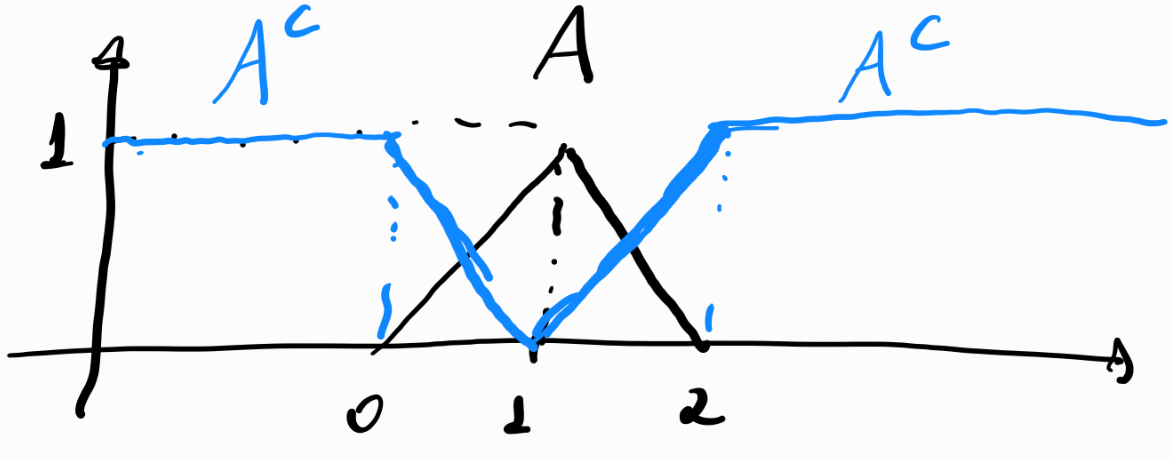
Por outro lado, a função de pertinência do vazio é dado por:

$\varphi_\emptyset(x) = 0$, $\forall x \in U$.

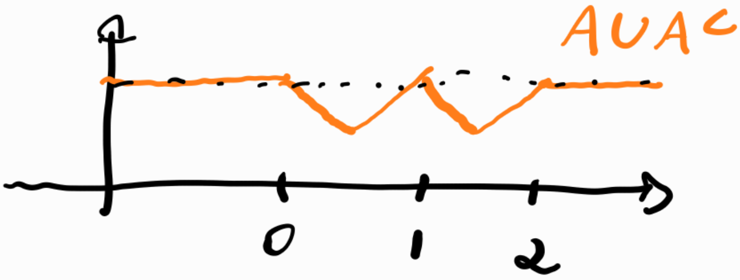
Note que na lógica clássica:

$A \cup A^c = U$ e $A \cap A^c = \emptyset$

Já no caso fuzzy:

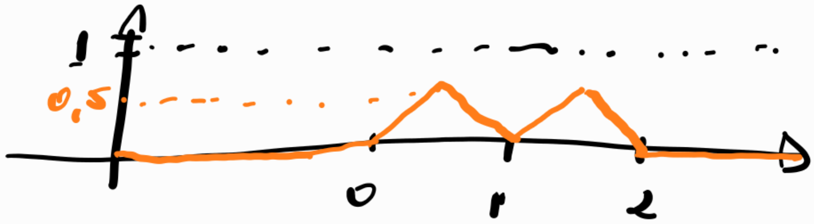


Assim $A \cup A^c =$



$A \cup A^c \neq \mathcal{U}$

$A \cap A^c =$



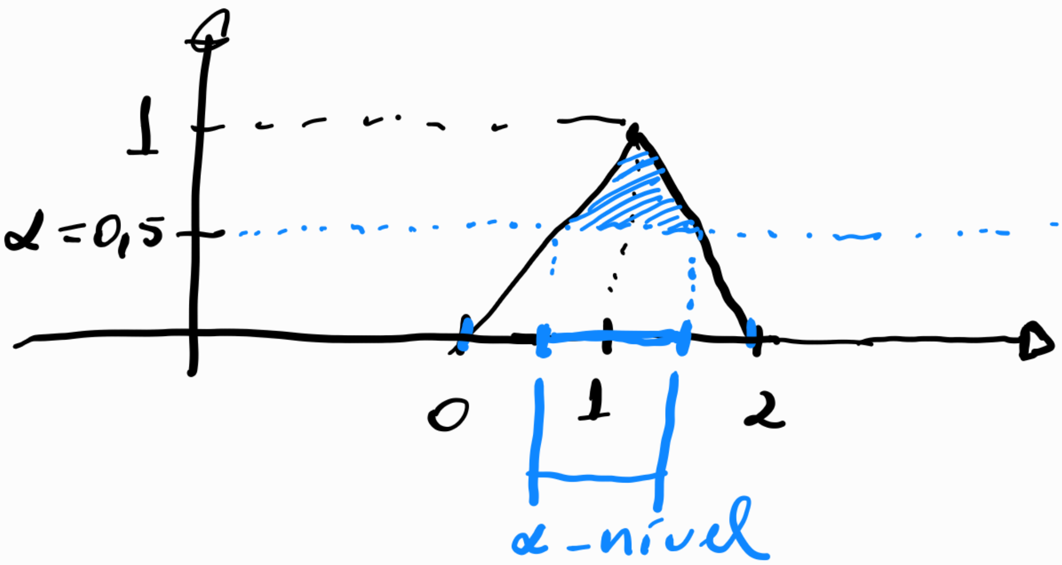
$A \cap A^c \neq \emptyset$

Números Fuzzy

Antes de definirmos os números fuzzy precisamos falar sobre α-nível. Seja A um conjunto fuzzy, os α-níveis de A são dados por:

$$\boxed{[A]_\alpha = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_A(x) \geq \alpha\},}$$

$\alpha \in [0,1]$



Já o 0-nível é definido por

$$[A]_0 = \overline{supp(A)}, \text{ sendo que}$$

$supp(A) = \{ x \in U : \varphi_A(x) > 0 \}$ é o suporte de A e $\overline{X}$ denota o fecho do conjunto X.

No exemplo anterior

$$[A]_0 = \overline{(0,2)} = [0,2].$$

O suporte pode ser interpretado como o conjunto de todos os elementos x tais que x tem alguma associação com A.

O núcleo de A é definido por:

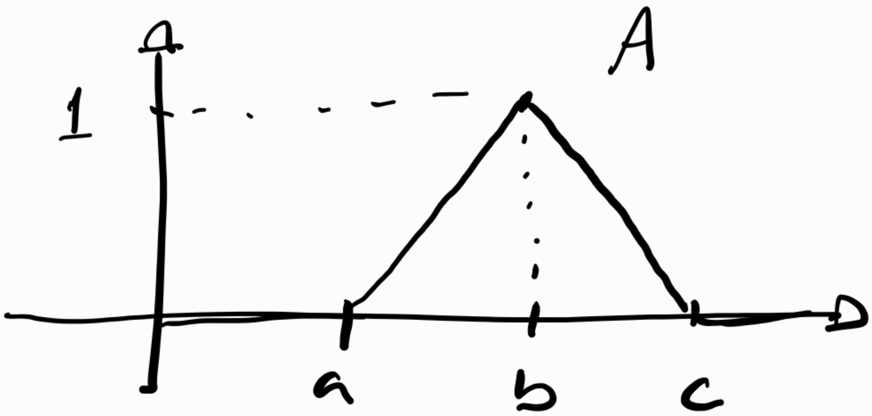
$$n(A) = \{ x \in U : \varphi_A(x) = 1 \}$$

Ou seja, o núcleo é formado pelos elementos com total associação com A.

Definição: Um conjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy se:

1) $U = \mathbb{R}$
2) Os α-níveis são não vazios
3) Os α-níveis são intervalos fechados e limitados
4) O suporte é limitado.

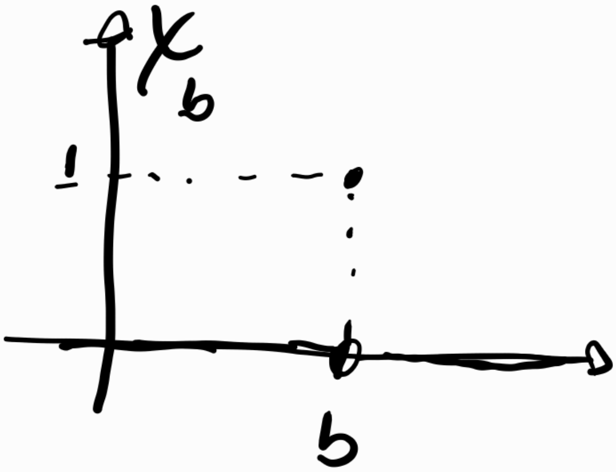
Exemplo: Números Fuzzy Triangulares

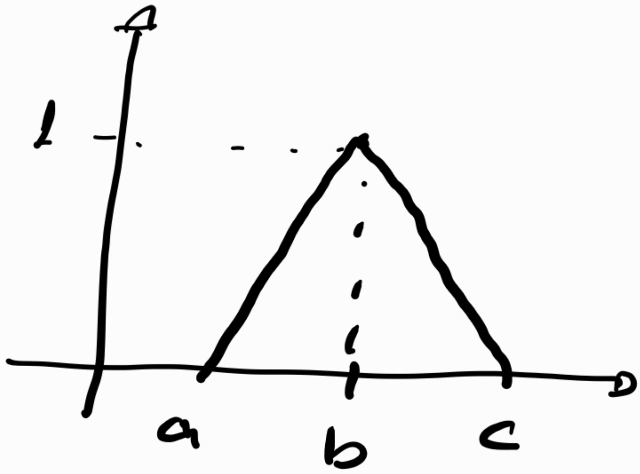


$A = (a; b; c)$

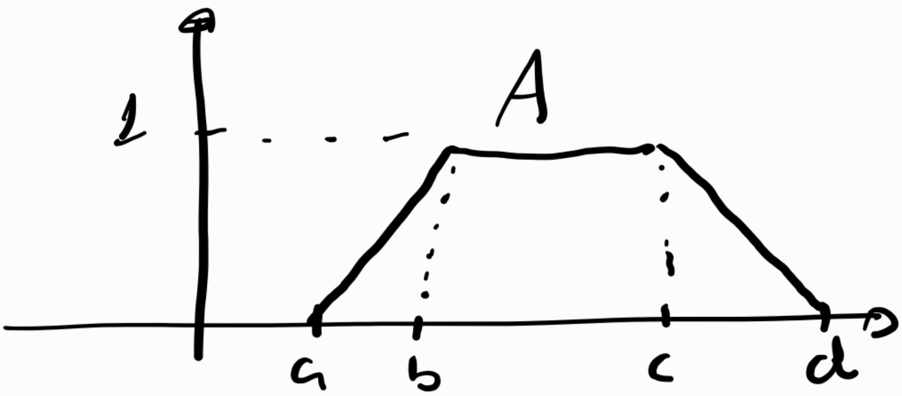
$$
\varphi_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b) \\[2ex] \dfrac{c-x}{c-b}, & x \in [b,c) \\[2ex] 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

O número fuzzy triangular generaliza o conceito de número real.





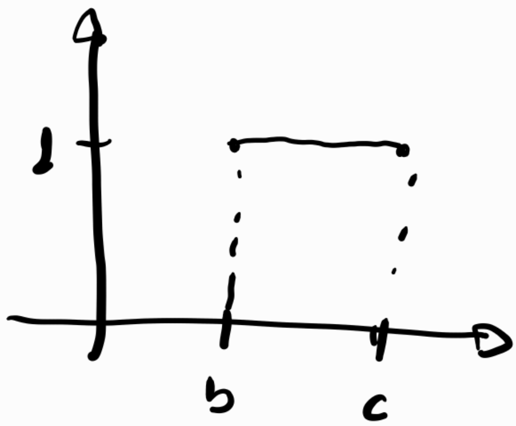
Exemplo: Número Fuzzy Trapezoidal

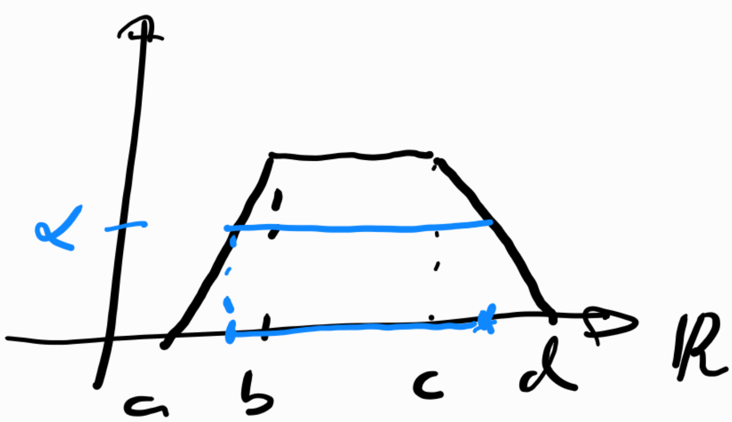


$A = (a; b; c; d)$

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b) \\ 1, & x \in [b,c] \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & x \in [c,d) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que se $b = c$ então o número fuzzy trapezoidal torna-se triangular. Além disso,





Vamos calcular os α-níveis de um número fuzzy triangular.

Seja $A = (a; b; c)$ triangular.

$$[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \underline{\underline{\underline{\varphi_A}}} (x) \geq \alpha\}$$

Se $x \in [a,b]$ então $\varphi_A(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$

$$x \in [A]_\alpha \Leftrightarrow \varphi_A(x) \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-a}{\underbrace{b-a}_{>0}} \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow x - a \geq \alpha(b-a)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \underline{\underline{a + \alpha(b-a)}}$$

Se $x \in [b,c]$ então $\varphi_A(x) = \dfrac{c-x}{c-b}$

$$x \in [A]_\alpha \Leftrightarrow \varphi_A(x) \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-x}{c-b} \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow c - x \geq \alpha(c-b)$$

$$\Leftrightarrow \quad c - \alpha(c-b) \geq x$$

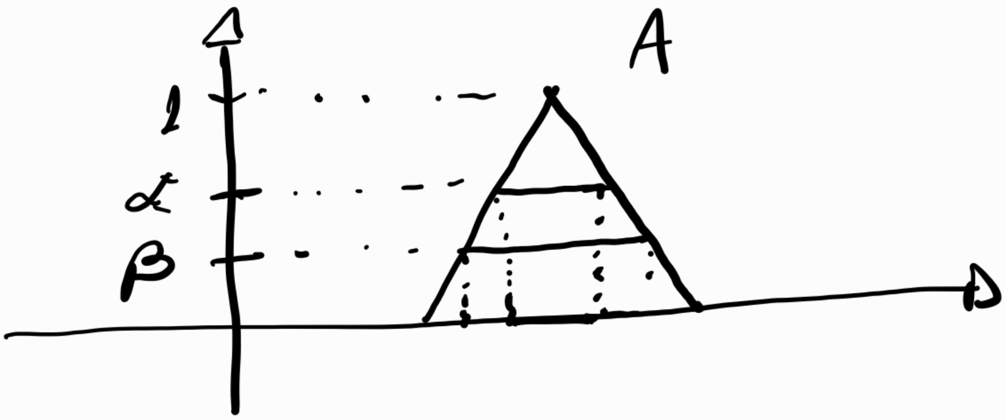
Juntando os dois casos temos que:

$$a + \alpha(b-a) \leq x \leq c - \alpha(c-b)$$

Logo, $[A]_\alpha = [a + \alpha(b-a), c - \alpha(c-b)]$

$[A]_0 = [a, c]$

$[A]_1 = [b, b]$



$$\alpha > \beta \Rightarrow [A]_\alpha \subseteq [A]_\beta$$

Se $x \in [A]_\alpha$ então $\varphi_A \underbrace{(x) \geq \alpha > \beta}$

Logo, $\varphi_A(x) > \beta \Rightarrow x \in [A]_\beta$.