Lista de Exercícios - Teoria dos Números - Matemática

1 Processo de Indução

Exercício 1.1. *Demonstre por indução que para $n \geq 1$ natural*

a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + \ldots + n)^2$

b) $(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7) = 2(1 + 2 + \ldots + n)^4$

c) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$, *em que* F_n *é a sequência de Fibonacci*

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$

Exercício 1.2. *Demonstre que, para quaisquer naturais $n \geq m$, o coeficiente binomial*

$$\binom{n}{m} \overset{def}{=} \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1}$$

é inteiro.

Exercício 1.3. *Demonstre a fórmula do binômio de Newton para n natural*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + \binom{n}{n} y^n \tag{2}$$

Exercício 1.4. *Demonstre que*

a) $n^3 - n$ *é múltiplo de 6 para todo natural n*

b) $5^n - 1$ *é múltiplo de 24 para todo natural n par*

c) $2^n + 1$ *é múltiplo de 3 para todo natural n ímpar*

Exercício 1.5. *Mostre que para todo natural $n \geq 4$, tem-se*

a) $2^n < n!$

b) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$

2 Divisibilidade

Exercício 2.1. *Determine todos os pares (m, n) de inteiros positivos para os quais*

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1} \tag{3}$$

é inteiro.

Exercício 2.2. *Sejam $m \neq n$ inteiros positivos. Mostre que*

$$mdc(a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1) = \begin{cases} 1 & \textit{se } a \textit{ é par} \\ 2 & \textit{se } a \textit{ é ímpar} \end{cases}. \tag{4}$$

Exercício 2.3 (Teorema de Bachet-Bézout)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com*

$$ax + by = mdc(a, b). \tag{5}$$

Portanto, se $c \in \mathbb{Z}$ divide a e b, então c divide $mdc(a, b)$.

a) *Demonstre o Teorema de Bachet-Bézout*

b) *Utilize o Teorema de Bachet-Bézout para mostrar que a equação*

$$ax + by = c, \tag{6}$$

com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, admite solução inteira se, e somente se, $mdc(a, b) | c$.

Exercício 2.4. *Mostre que se* $mdc(a, b) = 1$ *e* $a|bc$, *então* $a|c$.

Exercício 2.5. *Um natural* $p > 1$ *é chamado primo se os únicos divisores positivos de* p *são 1 e* p. *Um natural* $n > 1$ *é chamado composto se admite outros divisores além de 1 e* n.

Com base na definição dada acima, mostre que

a) *Se* p *é primo e* p *não divide* a, *então* $mdc(p, a) = 1$

b) *Sejam* p *primo e* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. *Se* $p|a_1 \ldots a_n$, *então* $p|a_i$, *para algum* i, $1 \leq i \leq n$

Exercício 2.6. *Demonstre as seguintes afirmações:*

a) *Se* p *é primo, então* $mdc(a, p)$ *é 1 ou* p

b) *Se* k *é um inteiro, então* $mdc(a, b) = mdc(a - kb, b)$

c) *Se* $a|c$, *então* $mdc(a, b)|mdc(c, b)$

d) *Se* $mdc(a, b) = 1$, *então* $mdc(ac, b) = mdc(c, b)$.

Exercício 2.7. *Sejam* a *e* b *dois números naturais. Mostre que* $mdc(a, b).mmc(a, b) = a.b$

3 Exercícios de Discussões

Exercício 3.1. *Em geral, no ensino básico, mostra-se a fórmula de Newton, dada na Equação* (2), *para* $n = 1, 2$. *Discuta sobre a necessidade de fornecer uma fórmula para expressão* $(x + y)^n$ *para* $n = 1, 2$, *ou até mesmo para* $n > 2$.

Exercício 3.2. *Considere* n *retas em posição geral em um plano, isto é, sem que haja duas retas paralelas ou três retas concorrentes em um mesmo ponto.*

a) *É possível determinar, em função de* n, *o número de regiões em que as retas dividem o plano? Em caso afirmativo, determine esse número. Caso contrário, justifique.*

b) *Escolha* $n = 3$ *e apresente uma discussão desse problema que poderia ser aplicado no ensino básico.*

c) *Escolha* $n > 3$ *e apresente uma discussão desse problema que poderia ser aplicado no ensino superior.*

Exercício 3.3. *Pintamos todos os pontos do plano de azul, verde ou preto. É possível determinar um retângulo no plano cujos vértices têm todos a mesma cor? Formule esse problema em termos matemáticos para o ensino superior.*

Exercício 3.4. *Em um tabuleiro* 9×9 *são colocados todos os números de 1 até 81. Mostre que existe um* k *tal que o produto dos números na* k*-ésima linha é diferente do produto dos números da* k*-ésima coluna. Elabore um problema similar a esse.*