# Sistemas Lineares

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

13 de abril de 2020

# Equação linear

## Definição

*Sejam* $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ *constantes e* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *variáveis.*
*Uma equação da forma:*

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$$

*é chamada de equação linear.*

# Equação linear

## Definição

*Sejam* $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ *constantes e* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *variáveis. Uma equação da forma:*

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$$

*é chamada de equação linear.*

**Exemplo:**

$$2x_1 = 1$$

# Equação linear

## Definição

*Sejam* $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ *constantes e* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *variáveis. Uma equação da forma:*

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$$

*é chamada de equação linear.*

**Exemplo:**

$$2x_1 = 1 \qquad 3x_1 + 2x_2 = 4$$

# Equação linear

## Definição

*Sejam* $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ *constantes e* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *variáveis. Uma equação da forma:*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

*é chamada de equação linear.*

**Exemplo:**

$$2x_1 = 1 \qquad 3x_1 + 2x_2 = 4 \qquad -4x_1 + x_2 - 8x_3 = 1$$

# Sistema Linear

Um sistema linear S é uma coleção de m equações lineares, em que cada uma delas envolvem n variáveis.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

# Sistema Linear

Um sistema linear S é dito homogêneo, se $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, isto é

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

**Exemplo:** (Homogêneo)

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

# Sistema Linear

**Exemplo:** (Homogêneo)

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

**Exemplo:** (não Homogêneo)

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

## Sistema Linear

**Exemplo:** (Homogêneo)

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

**Exemplo:** (não Homogêneo)

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

**Exemplo:** (não Homogêneo)

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 14 \end{cases}$$

# Sistema Linear

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

# Sistema Linear

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Substituindo $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, obtem-se

# Sistema Linear

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Substituindo $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, obtem-se

$$S = \begin{cases} 1 + 2 + 2(3) = 9 \\ 1 - 2 + 3 = 2 \\ 1 + 2(2) - 3(3) = -4 \end{cases}$$

# Sistema Linear

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases}$$

# Sistema Linear

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases}$$

Substituindo $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$, obtem-se

$$S = \begin{cases} 2 + 2(1) = 4 \\ 3(2) + 6(1) = 12 \end{cases}$$

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases}$$

Substituindo $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$, obtem-se

$$S = \begin{cases} 2 + 2(1) = 4 \\ 3(2) + 6(1) = 12 \end{cases}$$

Substituindo $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, obtem-se

$$S = \begin{cases} 0 + 2(2) = 4 \\ 3(0) + 6(2) = 12 \end{cases}$$

# Sistema Linear

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

## Sistema Linear

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Não possui solução, pois $x_1 + x_2$ resulta em dois valores distintos ao mesmo tempo!

# Classificação de Sistemas Lineares

1. **Sistema Possível e Determinado (SPD):** possui uma única solução;
2. **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** possui infinitas soluções;
3. **Sistema Impossível (SI):** não possui solução.

# Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

**Método do escalonamento:** O objetivo é transformar o sistema linear original, no seguinte sistema:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

através de operações elementares.

# Operações elementares

1. Multiplicar qualquer linha por um número real diferente de 0;
2. Permutar linhas;
3. Somar (subtrair) linhas.

# Resolução de Sistemas Lineares

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda, obtem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \qquad 2x_2 = 4 \end{cases}$$

## Resolução de Sistemas Lineares

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda, obtem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \quad\quad 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Logo, $2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2$.

# Resolução de Sistemas Lineares

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda, obtem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \qquad 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Logo, $2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2.$ Substituindo na primeira equação tem-se

$$x_1 + 2 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

Portanto, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ é a solução do sistema linear (Sistema Possível e Determinado).

## Resolução de Sistemas Lineares

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda linha por -2, obtem-se

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda linha por -2, obtem-se

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda, obtem-se

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ \qquad -x_2 = 3 \end{cases}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda linha por -2, obtem-se

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda, obtem-se

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ \qquad -x_2 = 3 \end{cases}$$

Logo, $-x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -3$.

# Resolução de Sistemas Lineares

Substituindo na primeira equação tem-se

$$2x_1 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 5 + 3 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{2} \Rightarrow x_1 = 4$$

Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = -3$ é a solução do sistema linear (Sistema Possível e Determinado).

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda linha por -1, obtem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

**Exemplo:**

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda linha por -1, obtem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda, obtem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Repetindo o mesmo processo para a terceira equação, tem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ \qquad 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

Repetindo o mesmo processo para a terceira equação, tem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

Multiplicando a terceira equação por 2, tem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ \qquad 2x_2 + x_3 = 7 \\ \qquad -2x_2 + 10x_3 = 26 \end{cases}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

Multiplicando a terceira equação por 2, tem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ \quad 2x_2 + x_3 = 7 \\ \quad -2x_2 + 10x_3 = 26 \end{cases}$$

Somando a terceira equação com a segunda, tem-se

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ \quad 2x_2 + x_3 = 7 \\ \quad\quad 11x_3 = 33 \end{cases}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

Logo, $11x_3 = 33 \Rightarrow x_3 = \frac{33}{11} \Rightarrow x_3 = 3.$

Logo, $11x_3 = 33 \Rightarrow x_3 = \frac{33}{11} \Rightarrow x_3 = 3$.

Substituindo $x_3 = 3$ na segunda equação, tem-se

$$2x_2 + 3 = 7 \Rightarrow 2x_2 = 7 - 3 \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$$

## Resolução de Sistemas Lineares

Logo, $11x_3 = 33 \Rightarrow x_3 = \frac{33}{11} \Rightarrow x_3 = 3$.

Substituindo $x_3 = 3$ na segunda equação, tem-se

$$2x_2 + 3 = 7 \Rightarrow 2x_2 = 7 - 3 \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$$

Substituindo $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ na primeira equação, tem-se

$$x_1 + 2 + 2(3) = 9 \Rightarrow x_1 + 8 = 9 \Rightarrow x_1 = 9 - 8 \Rightarrow x_1 = 1$$

Logo, $11x_3 = 33 \Rightarrow x_3 = \frac{33}{11} \Rightarrow x_3 = 3$.

Substituindo $x_3 = 3$ na segunda equação, tem-se

$$2x_2 + 3 = 7 \Rightarrow 2x_2 = 7 - 3 \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$$

Substituindo $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ na primeira equação, tem-se

$$x_1 + 2 + 2(3) = 9 \Rightarrow x_1 + 8 = 9 \Rightarrow x_1 = 9 - 8 \Rightarrow x_1 = 1$$

Portanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ é a solução do sistema linear (Sistema Possível e Determinado).

# Exercício proposto

Exercício 1, página 40/41 da apostila da Unip

Exercício 6, página 42 da apostila da Unip

Exercícios I)-IV), página 43 da apostila da Unip

# Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`