Matrizes

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

9 de abril de 2020

Definição

Uma matriz de ordem $m \times n$ *é uma tabela de números reais dispostos em* m *linhas e* n *colunas*

Matrizes

Definição

Uma matriz de ordem $m \times n$ é uma tabela de números reais dispostos em m linhas e n colunas

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Tipos de matrizes

Matrizes Quadradas (m=n) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Matrizes Retangulares ($m \neq n$) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Matrizes Linhas (m=1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{1\times 5}$

Matrizes Colunas (n=1) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

Tipos de matrizes

Matrizes Quadradas (m=n) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Matrizes Retangulares ($m \neq n$) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Matrizes Linhas (m=1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{1\times 5}$

Matrizes Colunas (n=1) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

Tipos de matrizes

Matriz Identidade É a matriz que possui o valor 1 na sua diagonal principal, e o valor 0 em suas demais entradas.

Exemplo:

$$I_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Tipos de matrizes

Matriz Nula É a matriz que possui o valor 0 em todas as suas entradas.

Exemplo:

$$0_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição

Duas matrizes A e B são iguais se, e somente se seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6 & 10 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Operações

Soma: A soma entre as matrizes A e B é dada pela soma dos elementos correspondentes de A e B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1+4 & 2+0 \\ -3+3 & 0+7 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Observação: Só é possível somar matrizes de mesma ordem!

Operações

Subtração: A subtração entre as matrizes A e B é dada pela subtração dos elementos correspondentes de A e B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-4 & 2-0 \\ -3-3 & 0-7 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Operações

Multiplicação: A multiplicação entre as matrizes A e B é dada pela multplicação das linhas de A pelas colunas de B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4 + 2.3 & 1.0 + 2.7 \\ -3.4 + 0.3 & -3.0 + 0.7 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações

Multiplicação: A multiplicação entre as matrizes A e B é dada pela multplicação das linhas de A pelas colunas de B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4 + 2.3 & 1.0 + 2.7 \\ -3.4 + 0.3 & -3.0 + 0.7 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{m \times n} . B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Cuidado! Em geral $A.B \neq B.A$

Exercício proposto

Exercício 8, página 15 da apostila da Unip

Exercício 5, página 23 da apostila da Unip

Matriz Inversa

Definição

A matriz quadrada A é inversível (não singular), se existir uma única matriz B tal que $A.B = B.A = I$, sendo I a matriz identidade.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b-d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \quad (II)$$

Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b-d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (I): $3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b-d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (I): $3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Substituindo na primeira equação de (I): $\frac{1}{3} - c = 1 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$

Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (II): $3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad\qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (II): $3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Substituindo na primeira equação de (II): $\frac{1}{3} - d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$

Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (II): $3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Substituindo na primeira equação de (II): $\frac{1}{3} - d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$

Portanto,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Quando existir a matriz B, denotamos $B = A^{-1}$

Como saber se uma matriz é inversível?

Determinante é uma lei que associa a cada matriz quadrada um número real.

Como saber se uma matriz é inversível?

Determinante é uma lei que associa a cada matriz quadrada um número real.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

Determinante é uma lei que associa a cada matriz quadrada um número real.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

Determinante é uma lei que associa a cada matriz quadrada um número real.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A) &= 2.4 - (-1).3 \\ &= 8 - (-3) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \quad 2.1.4 + 3.(-2).1 + 0.0.0 = 8 - 6 + 0 = 2$$

Como saber se uma matriz é inversível?

$$A = \left[\begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \; 2.1.4 + 3.(-2).1 + 0.0.0 = 8 - 6 + 0 = 2$$

$$A = \left[\begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \quad 2.1.4 + 3.(-2).1 + 0.0.0 = 8 - 6 + 0 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \quad 1.1.0 + 0.(-2).(-2) + 4.0.3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Como saber se uma matriz é inversível?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow 2.1.4 + 3.(-2).1 + 0.0.0 = 8 - 6 + 0 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow 1.1.0 + 0.(-2).(-2) + 4.0.3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$det(A) = 2 - 0 = 2$$

Como saber se uma matriz é inversível?

Uma matriz A é inversível (ou também chamada de não singular) se, e somente se, $det(A) \neq 0$.

Como saber se uma matriz é inversível?

Uma matriz A é inversível (ou também chamada de não singular) se, e somente se, $det(A) \neq 0$.

Exemplo: Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Como saber se uma matriz é inversível?

Uma matriz A é inversível (ou também chamada de não singular) se, e somente se, $det(A) \neq 0$.

Exemplo: Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A é inversível, pois $det(A) = 3 - 0 = 3$.

B **não** é inversível, pois $det(B) = 4 - 4 = 0$.

Exercícios propostos

Exercício 10, página 15 da apostila da Unip

Exercício 12, página 15 da apostila da Unip

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação