# Função Logarítmica

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

28 de abril de 2020

## Definição

*A função $f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é chamada de função logarítmica na base $a$.*

## Definição

*A função $f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é chamada de função logarítmica na base a.*

**A expressão matemática $\log_a(b) = c$ significa que $a^c = b$, com $b > 0$.**

**Exemplo:**

$\log_2(16) = 4$, pois $2^4 = 16$.

## Definição

*A função $f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é chamada de função logarítmica na base a.*

**A expressão matemática $\mathbf{\log_a(b) = c}$ significa que $\mathbf{a^c = b}$, com $\mathbf{b > 0}$.**

**Exemplo:**

$\log_2(16) = 4$, pois $2^4 = 16$.

$\log_3(27) = 3$, pois $3^3 = 27$.

## Definição

*A função $f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é chamada de função logarítmica na base a.*

**A expressão matemática $\mathbf{\log_a(b) = c}$ significa que $\mathbf{a^c = b}$, com $\mathbf{b > 0}$.**

**Exemplo:**

$\log_2(16) = 4$, pois $2^4 = 16$.

$\log_3(27) = 3$, pois $3^3 = 27$.

$\log_{10}(10000) = 4$, pois $10^4 = 10000$.

# Propriedades

- $\log_c(a.b) = \log_c(a) + \log_c(b)$

- $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$

- $\log_c(a)^m = m\log_c(a)$

- $\log_c(1) = 0$

- $\log_c(c) = 1$

# Propriedades

$$log_c(x) = y \quad \Rightarrow \quad x = c^y$$

# Propriedades

$$
\begin{aligned}
log_c(x) = y \quad & \Rightarrow \quad x = c^y \\
& \Rightarrow \quad log(x) = log(c^y)
\end{aligned}
$$

# Propriedades

$$\begin{aligned} log_c(x) = y &\Rightarrow x = c^y \\ &\Rightarrow log(x) = log(c^y) \\ &\Rightarrow log(x) = ylog(c) \end{aligned}$$

# Propriedades

$$
\begin{aligned}
log_c(x) = y \quad & \Rightarrow \quad x = c^y \\
& \Rightarrow \quad log(x) = log(c^y) \\
& \Rightarrow \quad log(x) = ylog(c) \\
& \Rightarrow \quad y = \frac{log(x)}{log(c)}
\end{aligned}
$$

# Propriedades

$$
\begin{aligned}
log_c(x) = y \quad & \Rightarrow \quad x = c^y \\
& \Rightarrow \quad log(x) = log(c^y) \\
& \Rightarrow \quad log(x) = ylog(c) \\
& \Rightarrow \quad y = \frac{log(x)}{log(c)}
\end{aligned}
$$

$$
log_c(x) = \frac{log(x)}{log(c)}
$$

# Propriedades

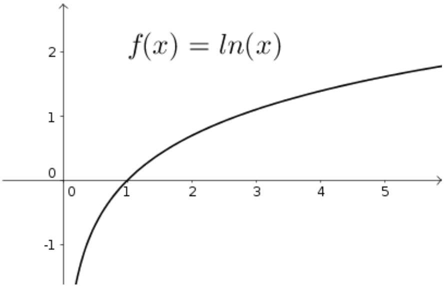
$$
\begin{aligned}
log_c(x) = y \quad &\Rightarrow \quad x = c^y \\
&\Rightarrow \quad log(x) = log(c^y) \\
&\Rightarrow \quad log(x) = ylog(c) \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{log(x)}{log(c)}
\end{aligned}
$$

$$log_c(x) = \frac{log(x)}{log(c)} = \frac{1}{log(c)} log(x)$$

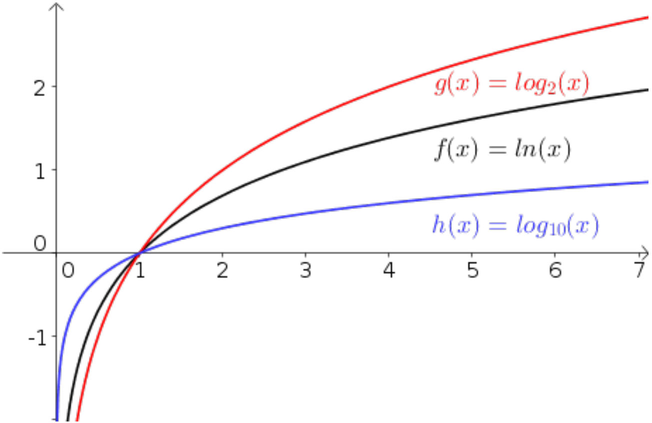
# Logaritmo Natural

O logaritmo natural ou também chamado de logaritmo neperiano, é o log definido na base $e$.

O logaritmo natural é denotado por $f(x) = ln(x)$.



# Comparação entre funções logarítmicas



## Características de funções logarítmicas

- $Dom(f) = \mathbb{R}_+^*$

- $Im(f) = \mathbb{R}$.

- É sempre uma função crescente que cruza o eixo-x no ponto $x = 1$.

## Definição

*Seja $f$ uma função. A função $f^{-1}$ é chamada de inversa de $f$ se satisfaz:*

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

A função logarítmica possui a propriedade de ser a função inversa da função exponencial.

$$\mathbf{e^{\ln(x)} = x} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\ln(e^{x}) = x}$$

## Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

# Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

Usando propriedades de função exponencial:

$9^x = 81$

# Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

Usando propriedades de função exponencial:

$9^x = 81 \Rightarrow (9)^x = 9^2$

# Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

Usando propriedades de função exponencial:

$$9^x = 81 \Rightarrow (9)^x = 9^2 \Rightarrow x = 2$$

# Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

Usando propriedades de função exponencial:

$9^x = 81 \Rightarrow (9)^x = 9^2 \Rightarrow x = 2$

Usando propriedades de função logarítmica:

$9^x = 81$

# Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

Usando propriedades de função exponencial:

$$9^x = 81 \Rightarrow (9)^x = 9^2 \Rightarrow x = 2$$

Usando propriedades de função logarítmica:

$$9^x = 81 \Rightarrow log_9(9^x) = log_9(9^2)$$

# Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

Usando propriedades de função exponencial:

$$9^x = 81 \Rightarrow (9)^x = 9^2 \Rightarrow x = 2$$

Usando propriedades de função logarítmica:

$$9^x = 81 \Rightarrow log_9(9^x) = log_9(9^2) \Rightarrow xlog_9(9) = 2log_9(9)$$

# Exemplos

**1)** Determine o valor de $x$ que satisfaz $9^x = 81$.

Usando propriedades de função exponencial:

$$9^x = 81 \Rightarrow (9)^x = 9^2 \Rightarrow x = 2$$

Usando propriedades de função logarítmica:

$$9^x = 81 \Rightarrow log_9(9^x) = log_9(9^2) \Rightarrow xlog_9(9) = 2log_9(9) \Rightarrow x = 2$$

# Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

# Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

**a)** Para determinar o coeficiente $C$ fazemos:

$P(0) = C.2^{k0}$

## Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

**a)** Para determinar o coeficiente $C$ fazemos:

$$P(0) = C.2^{k0} \quad \Rightarrow \quad 5000 = C.2^{0}$$

# Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

**a)** Para determinar o coeficiente $C$ fazemos:

$$P(0) = C.2^{k0} \quad \Rightarrow \quad 5000 = C.2^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 5000$$

# Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

**a)** Para determinar o coeficiente $C$ fazemos:

$$P(0) = C.2^{k0} \quad \Rightarrow \quad 5000 = C.2^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 5000$$

**b)** Para determinar o coeficiente $k$ fazemos:

$$P(6) = 5000.2^{k6}$$

# Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

**a)** Para determinar o coeficiente $C$ fazemos:

$$P(0) = C.2^{k0} \quad \Rightarrow \quad 5000 = C.2^0 \quad \Rightarrow \quad C = 5000$$

**b)** Para determinar o coeficiente $k$ fazemos:

$$P(6) = 5000.2^{k6} \Rightarrow 1000 = 5000.2^{k6}$$

## Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

**a)** Para determinar o coeficiente $C$ fazemos:

$$P(0) = C.2^{k0} \quad \Rightarrow \quad 5000 = C.2^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 5000$$

**b)** Para determinar o coeficiente $k$ fazemos:

$$P(6) = 5000.2^{k6} \Rightarrow 1000 = 5000.2^{k6} \Rightarrow \frac{1000}{5000} = 2^{k6}$$

# Exemplo

Suponha que o número P de unidades produzidas por uma empresa venha decaindo com o tempo $t$ (em anos) segundo a função $P(t) = C.2^{kt}$, sendo $C$ e $k$ constantes. Sabendo que a empresa começou com a produção de 5000 unidades e depois de 6 anos possui 1000 unidades, determine as constantes $C$ e $k$.

**a)** Para determinar o coeficiente $C$ fazemos:

$$P(0) = C.2^{k0} \quad \Rightarrow \quad 5000 = C.2^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 5000$$

**b)** Para determinar o coeficiente $k$ fazemos:

$$P(6) = 5000.2^{k6} \Rightarrow 1000 = 5000.2^{k6} \Rightarrow \frac{1000}{5000} = 2^{k6} \Rightarrow 0,2 = 2^{k6}$$

$$0,2 = 2^{k6} \quad \Rightarrow \quad log_2(0,2) = log_2(2^{k6})$$

$$
\begin{aligned}
0,2 = 2^{k6} \quad &\Rightarrow \quad log_2(0,2) = log_2(2^{k6}) \\
&\Rightarrow \quad log_2(0,2) = k6\,log_2(2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,2 = 2^{k6} &\Rightarrow log_2(0,2) = log_2(2^{k6}) \\
&\Rightarrow log_2(0,2) = k6 log_2(2) \\
&\Rightarrow -2,32 = k6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,2 = 2^{k6} \quad &\Rightarrow \quad log_2(0,2) = log_2(2^{k6}) \\
&\Rightarrow \quad log_2(0,2) = k6 log_2(2) \\
&\Rightarrow \quad -2,32 = k6 \\
&\Rightarrow \quad k = -\frac{2,32}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,2 = 2^{k6} \quad & \Rightarrow \quad log_2(0,2) = log_2(2^{k6}) \\
& \Rightarrow \quad log_2(0,2) = k6 log_2(2) \\
& \Rightarrow \quad -2,32 = k6 \\
& \Rightarrow \quad k = -\frac{2,32}{6} \\
& \Rightarrow \quad k \approx -0,39
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,2 = 2^{k6} \quad &\Rightarrow \quad log_2(0,2) = log_2(2^{k6}) \\
&\Rightarrow \quad log_2(0,2) = k6 log_2(2) \\
&\Rightarrow \quad -2,32 = k6 \\
&\Rightarrow \quad k = -\frac{2,32}{6} \\
&\Rightarrow \quad k \approx -0,39
\end{aligned}
$$

Portanto, $P(t) = 5000.2^{-0,39t}$.

# Exercícios propostos

Exercício 1, página 106 apostila da Unip

Exercício 2, página 107 apostila da Unip

- Os exercícios em preto são para praticar.
- Os exercícios em vermelho são para entregar.

# Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`