Estudo de valores para teste da associatividade em aritmética intervalar por meio da utilização de métodos computacionais

Pedro H. M. Zanineli & Vinícius F. Wasques

Ilum Escola de Ciência - Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais

pedro.zanineli12@gmail.com

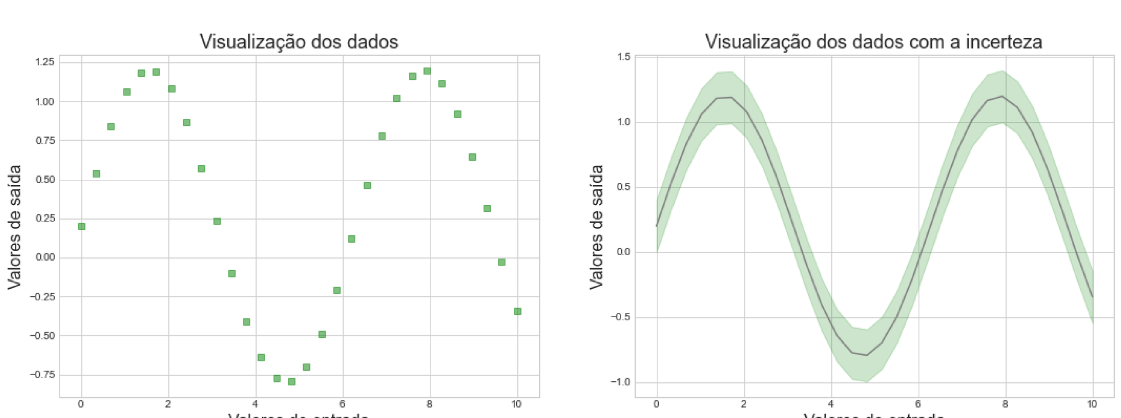
1 Introdução

Como se sabe, nem todas as aritméticas no espaço dos intervalos fornecem uma estrutura de espaço vetorial. Muitas vezes propriedades como elemento neutro e oposto não são satisfeitas. Por outro lado, a propriedade de associatividade pode não ser válida também [1].

O intuito deste trabalho é investigar uma família de aritméticas intervalares que estejam associadas a um parâmetro $\gamma \in [0,1]$, de tal forma a buscar candidatos que satisfaçam a propriedade de associatividade por meio da utilização de técnicas computacionais.

2 Propagação da incerteza

Em uma medição, é comum observar a existência de variáveis incertas, ou erros, de forma que no estudo do problema, admitamos a propagação da incerteza. Por exemplo, podemos realizar uma medição que tem como resultado um conjunto de dados de entrada e de saída, de forma a existir uma incerteza, assim como é possível observar na Figura 1.



Visualização dos dados de uma medição hipotética é mostrado à esquerda e com a respectiva visualização da incerteza é mostrado à direita.

Dessa forma, é possível observar que o resultado da medição passa a ser um intervalo e não mais um único valor. Isto é, haja visto que o erro deve ser considerado, para um resultado r com erro e, a medição final será $r \pm e$, ou ainda $[r-e, r+e]$ - onde $r-e$ é o limite inferior e $r+e$ o limite superior.

É importante notar que, para os intervalos A e B contidos no conjunto de dados, em que o limite inferior é igual a $\underline{a}$ e $\underline{b}$, e o limite superior é igual a $\overline{a}$ e $\overline{b}$, respectivamente para cada intervalo, a soma $A+B=C$, em que C é o resultado da operação, não pode ser dada como

$$[\underline{a}+\underline{b}, \overline{a}+\overline{b}] = [\underline{c}, \overline{c}],$$

haja visto que não é funcional para todos os casos. Na realidade, a operação é dada por

$$\underline{c} = (\underline{a}+\overline{b}-\gamma(\overline{b}-\underline{b})) \wedge (\overline{a}+\underline{b}-\gamma(\overline{a}-\underline{a})),$$

e

$$\overline{c} = (\underline{a}+\overline{b}+\gamma(\overline{a}-\underline{a})) \vee (\overline{a}+\underline{b}+\gamma(\overline{b}-\underline{b})),$$

onde γ deve ser um escalar contido em $[0,1]$ e os símbolos $\vee$ e $\wedge$ significam o máximo e o mínimo, respectivamente [2].

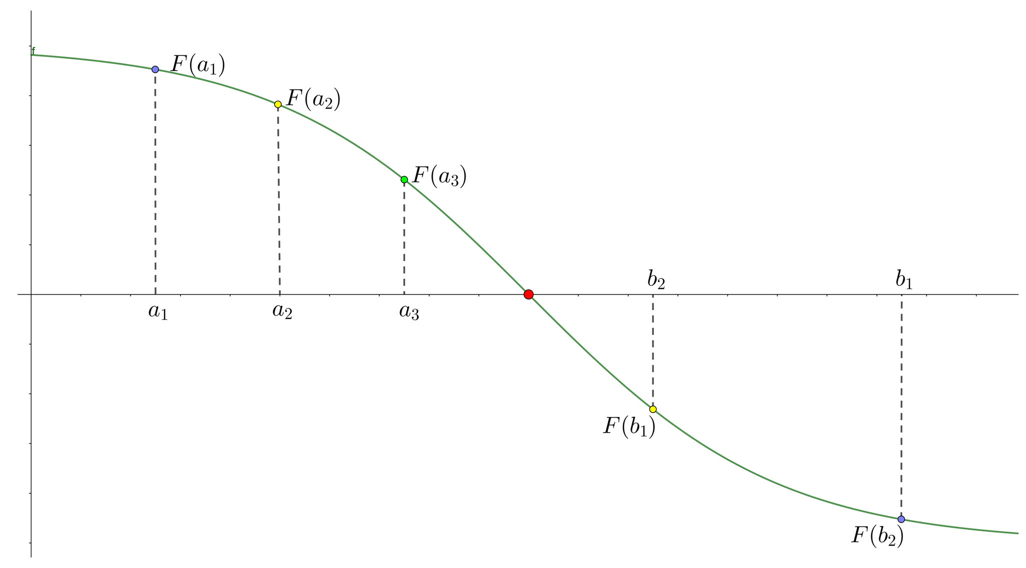
Essa escolha de aritmética foi feita a partir do uso da relação de interatividade fuzzy, da qual pode ser aplicada também para intervalos. Essa relação permite considerar conexões intrínsecas entre os operandos, implicando em uso externo de aplicações [3].

Assim, a relação de interatividade é ponderada por meio do parâmetro γ, e assim tem-se como objetivo determinar os valores de tal forma que para os intervalos X, Y e Z seja válido

$$(X+Y)+Z = X+(Y+Z).$$

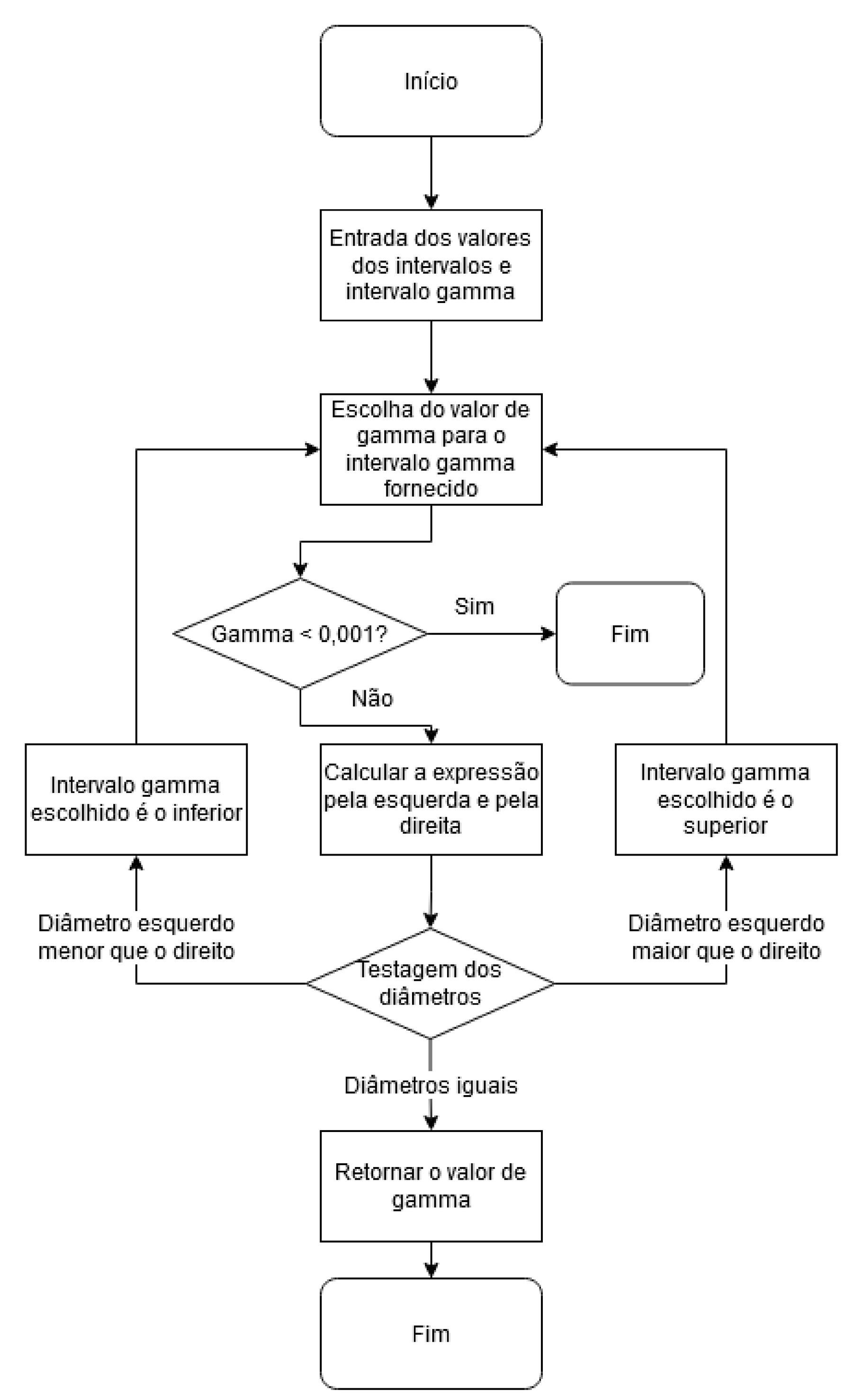
3 Aplicação do método da bisseção

Como forma de encontrar o valor de γ, foi utilizado o método da bisseção ilustrado na Figura 2, a fim de testar diferentes candidatos para gamma. O método tem como objetivo a busca de raízes para um determinado problema levando em consideração o resultado previamente obtido.



Representação visual do método da bisseção de busca de raízes de forma que o ponto em vermelho demonstre o resultado final.

O programa continua realizando as mesmas operações até que o diâmetro pela esquerda seja igual ao diâmetro pela direita ou o valor de γ seja igual ao anterior, possibilitando a compreensão de que não existem valores que validem a associatividade. Caso o diâmetro esquerdo seja maior que o direito, o intervalo escolhido é o superior, caso contrário, o inferior é escolhido.



Fluxograma representativo do programa desenvolvido para busca dos valores de γ que validem a associatividade.

4 Análise dos resultados

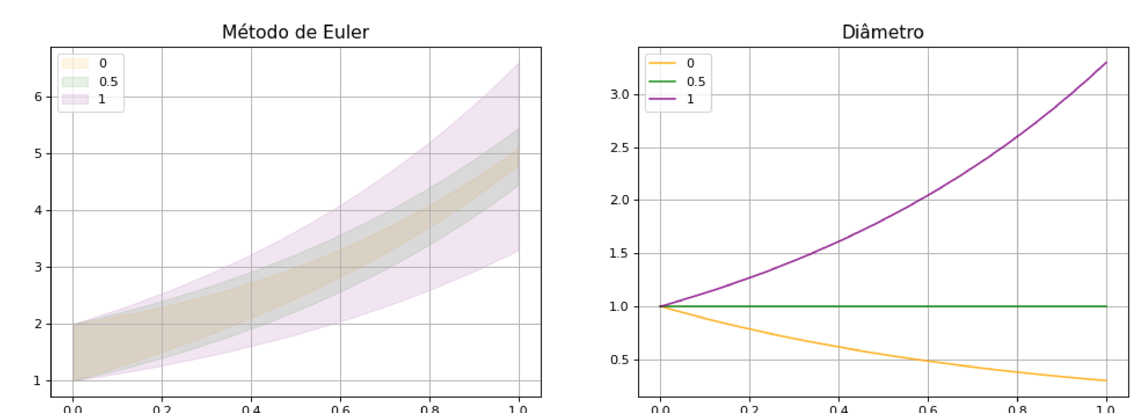
Ao testar valores no intervalo inicial especificado, o programa retornou $\gamma = 0.5$, indicando que a associatividade é verdadeira. É evidente, entretanto, que outros valores não foram testados, haja visto que o método calcula a média entre o valor inferior e superior do intervalo, e, portanto 0.5 para a primeira iteração.

Sendo assim, a fim de englobar o teste de uma maior quantidade de valores, o intervalo $[0, 0.5]$ também foi testado, retornando 0.25 e 0.375, enquanto que, ao testar o intervalo $[0.5, 1]$, foi retornado o valor de 0.75.

5 Estudo de métodos numéricos

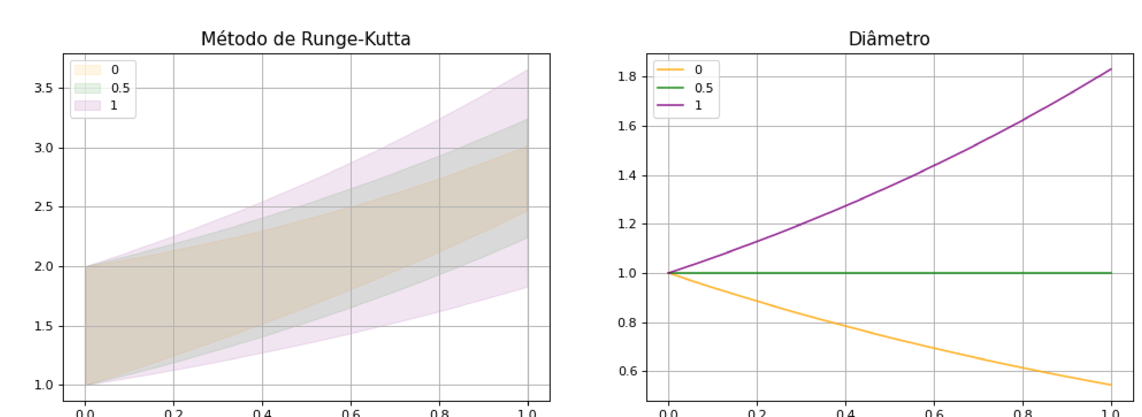
A fim de analisar o valor de gamma igual a 0.5 encontrado, nas figuras 4, 5 e 6 é mostrado o comportamento dos valores de γ quanto aplicado em diferentes métodos numéricos. Para tanto, foi plotada uma função diferencial que tem como resultado uma função exponencial.

Primeiramente, o método de Euler foi usado, resultando na Figura 4.



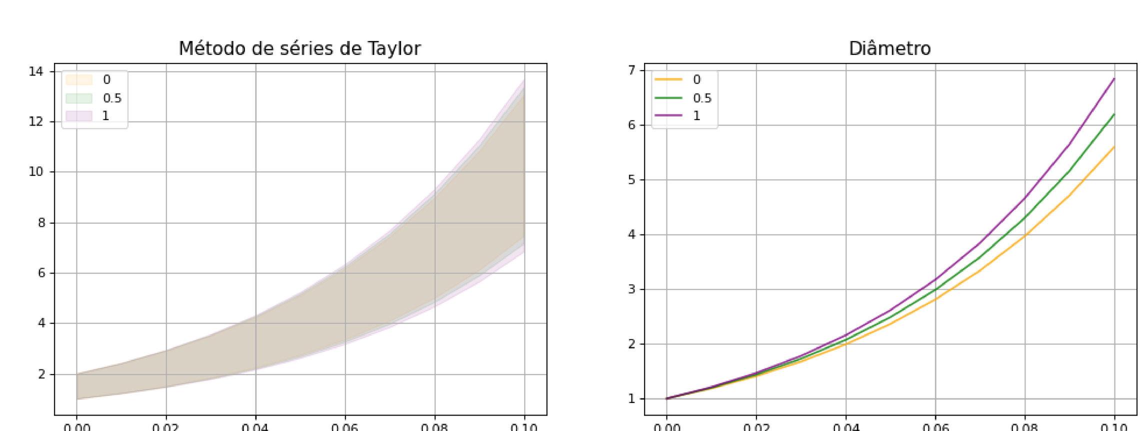
Progressão dos métodos numéricos para 100 iterações. Diferentemente dos valores das extremidades, o valor de $\gamma = 0.5$ encontrado manteve o diâmetro do intervalo.

Em seguida, o método proposto foi o de Runge-Kutta, mostrado na Figura 5.



Progressão dos métodos numéricos para 100 iterações. Assim como no método de Euler, o diâmetro permanece o mesmo para o valor de gamma igual a 0.5.

Por fim, é possível observar na Figura 6 o método de séries de Taylor.



Progressão dos métodos numéricos para 10 iterações. Diferentemente dos demais, o valor de 0.5 altera o diâmetro do intervalo.

6 Considerações finais

Essa constatação permite concluir que a aritmética intervalar para $\gamma = 0.5$ produz métodos numéricos coerentes do ponto de vista de associatividade.

Como trabalhos futuros, pretende-se utilizar tal aritmética para aplicações em equações diferenciais intervalares e em problemas de quadrados mínimos intervalares, buscando utilizar dados reais.

Referências

[1] Wasques, V.F., Esmi, E., Barros, L.C., Sussner, P. *"Numerical solution for fuzzy initial value problems via interactive arithmetic: application to chemical reactions"*, International Journal of Computational Intelligence Systems 13 (1), 1517, 2020.

[2] Esmi, E., Sacilotto, C., Wasques, V.F., Barros, L.C. *"Numerical solution for interval initial value problems based on interactive arithmetic"*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 19(6), 1-12, 2022.

[3] Wasques, V.F. *"Fuzzy differential equations via interactive arithmetic: applications in biomathematics"*, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2019.