Formalismo de Conceitos Matemáticos em um Curso de Ciências

Isadora Marcondes Alves Fernandes Lopes & Vinícius F. Wasques

Ilum Escola de Ciência

Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM)

isadora220051@ilum.cnpem.br, vinicius.wasques@ilum.cnpem.br

Introdução

A Ilum Escola de Ciência é a escola de ensino superior vinculada e criada pelo CNPEM (Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais), ela oferece o bacharel em Ciência e Tecnologia, graduação que garante a interdisciplinaridade nas diversas áreas de ciência. Entre os principais objetivos da instituição temos a formação de alunos com experiência e conhecimento de alto nível, preparados para atuar na intersecção de diferentes campos de pesquisa, competências que são alcançadas apenas em pós-graduações na formação tradicional do Brasil.
Assim, os cursos da área de matemática cumprem o papel de ferramenta para interpretar e descrever fenômenos abordados em laboratório, por exemplo, por isso não são explorados com a mesma profundidade e formalismo de outras graduações.
Além disso, faz parte da proposta da instituição a utilização da metodologia ativa, que prevê a protagonização do aluno em seu aprendizado, fazendo com que cada um dos alunos tenha o ensino personalizado segunda sua demanda. Desta maneira, cabe ao aluno definir a complexidade em que cada conteúdo será explorado. O objetivo desta pesquisa é a formalização de alguns conceitos apresentados durante o curso na área de Matemática Aplicada.

Formalização matemática

Para iniciar os estudos partimos da análise matemática, com a descrição da infinitude do conjunto dos números naturais, a fim de entender as diversas formas de um raciocínio matemático. Em seguida, a partir de tais abstrações, partimos para a compreensão do formalismo matemático na área de equações diferenciais.
A construção dos números naturais foi feita a partir de três principais características, que são conhecidas por axiomas de Peano:

1. A existência de uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ em que $s(n)$ indica o sucessor de n.
2. Existe um único número que não é sucessor de nenhum outro, ou seja, $s(n) \neq 1$.
3. Se um conjunto pertencente aos números naturais ($\mathbb{X}$) possui o número 1, $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$ e $1 \in \mathbb{X}$, então esse conjunto contém todos os números naturais, $\mathbb{X} = \mathbb{N}$.

Assim, usando os axiomas conseguimos provar a infinitude do conjunto dos números naturais. Para visualizar tal resultado, podemos por exemplo considerar o seguinte raciocínio. Suponha que $\mathbb{N}$ tenha 7 elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, sem perda de generalidade suponha que x_7 seja o maior elemento desse conjunto. Considere $s(x_7) = a$, assim $a \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, porém, pelo primeiro axioma $a \in \mathbb{N}$. Portanto $\mathbb{N}$ não pode ter apenas 7 elementos.
Já na área de Equações Diferenciais, como exemplo de uma aplicação em conteúdos abordados no curso, usamos a equação de Verhulst, que é descrita por

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \tag{1}$$

O modelo de Verhulst é utilizado para descrever crescimento Malthusiano de uma população, representado pelo termo rx, além de levar em consideração o encontro populacional descrito por $-r\frac{x^2}{k}$, que causa o decrescimento dos indivíduos estudados.
Para obter os pontos de equilíbrio basta igualar a equação á zero, pois a derivada nula indica estabilidade no ponto.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0 \tag{2}$$

Para que a equação se iguale a 0, x pode tomar os valores 0 ou k, portanto os pontos de equilíbrio dessa equação são $\bar{x} = 0$ ou $\bar{\bar{x}} = k$.
Para classificar os pontos de equilíbrio usaremos $r > 0$ e $k > 0$. Dado $x < \bar{x}$, $(x < 0)$, então $rx < 0$. Ainda se $x < 0$ e sabendo que $k > 0$ temos $\frac{x}{k} < 0$, como $0 < 1$ e $\frac{x}{k} < 0$, então $\frac{x}{k} < 1$, assim $0 < 1 - \frac{x}{k}$. Portanto $rx(1 - \frac{x}{k}) < 0$, ou seja, para um x menor que 0 a equação é decrescente nesse ponto.

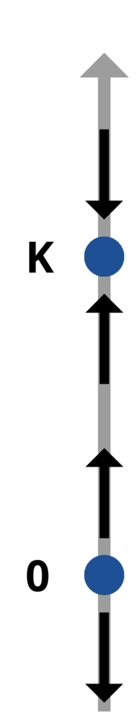

Figure 1: *Pontos de equilíbrio da equação de Verhulst, na imagem vemos que k é um ponto atrator e 0 um ponto repulsor.*

Se, porém, $x > 0$, sabendo que $r > 0$, então $rx > 0$. Como $x > 0$ e $k > 0$, temos $\frac{x}{k} > 0$. Note que, nesta etapa estamos testando o intervalo $0 < x < \bar{\bar{x}}$, ou seja, x está entre 0 e a capacidade suporte k, portanto $x < k$ e

$$x\frac{1}{k} < \frac{k}{k} = 1 \Rightarrow \frac{x}{k} < 1 \tag{3}$$

Logo $1 - \frac{x}{k} > 0$. Portanto $rx(1 - \frac{x}{k}) > 0$. Assim, para esse intervalo a equação é crescente, mostrando que o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é instável, uma vez que os valores abaixo e acima tendem a se distanciar, o que pode ser verificado no campo de direções 2 no ponto 0.
Para $x > k$, sabendo que $k > 0$ então $x > 0$, assim $\frac{x}{k}$ e rx são maiores que 0. Note que, se $x > k$, temos que $x\frac{1}{k} > k\frac{1}{k}$. Então, segue que $\frac{x}{k} > 1$. Assim $1 - \frac{x}{k} < 0$, portanto $rx(1 - \frac{x}{k}) < 0$. Faz notório que para $x > k$ a derivada é negativa, decrescente, classificando o ponto de equilíbrio na capacidade suporte ($\bar{\bar{x}}$) como atrator (tais classificações são representadas pela Figura 1).
Para verificar a veracidade dos pontos encontrados vejamos no campo de direções, gerado pela plataforma Mathematica. Usamos um valor arbitrário para k, apenas para que fosse possível plotar o gráfico.

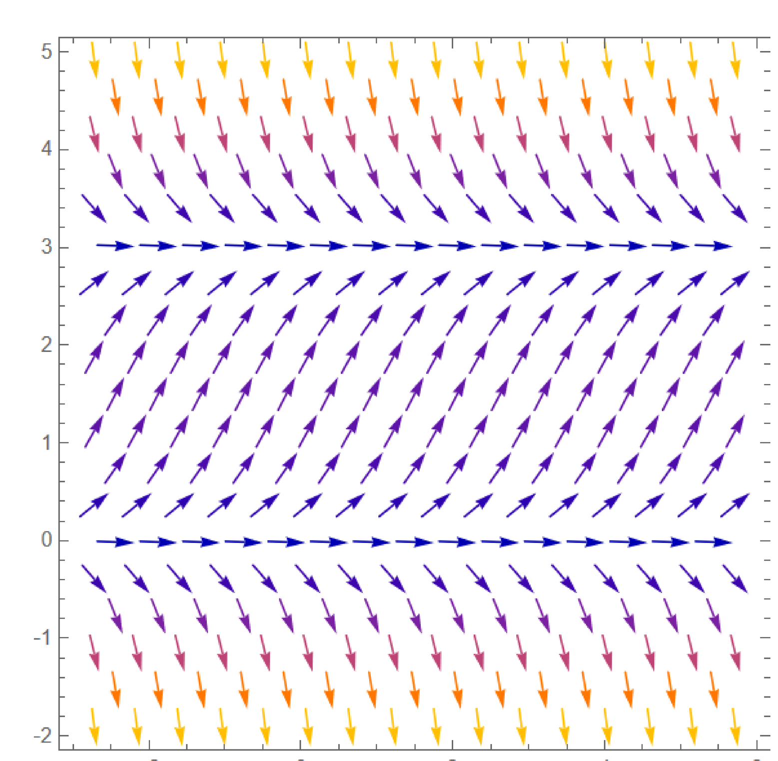

Figure 2: *Campo de direções da equação de Verhulst onde foram adotados valores arbitrários de $r = 2$ e $k = 3$.*

Discussão

O aprendizado do formalismo matemático é importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico o que auxiliará na compreensão de outros conteúdos oferecidos durante o curso, além de expandir oportunidades de pós-graduação. A aplicação apresentada aqui traz uma análise qualitativa do modelo de dinâmica populacional proposto por Verhulst. O estudo de equilíbrio traz um significado para o problema que pode ser constatado na prática. No que diz respeito a compreensão de outras matérias, podemos pontuar a compreensão da cinética química, que pode ser descrita com um campo de direções, e a classificação de seus pontos de equilíbrio refere-se a características específicas da reação. Esse é o objeto de estudo desse projeto no momento.

Considerações Finais

Esse trabalho tem o objetivo de aprofundar na teoria matemática e suas formalizações para posteriormente serem aplicadas nos conteúdos abordados no curso de ciências, desta maneira, os próximos passos a serem tomados é a compreensão de álgebra linear para maior entendimento dos conceitos de física quântica, dando ênfase em conjuntos, corpos e limite, além de dar continuidade no estudo da análise matemática.

Agradecimentos

Esse projeto foi executado com o apoio financeiro da Ilum Escola de Ciências.

References

[1] E, Lima. Curso De Analise - Vol.1. *Impa*, 1995.

[2] D. G. Zill. Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem. *Thomson*, 2003.

[3] W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis, second edition. *McGraw-Hill*, 1964.