

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

# Notas de aula

## Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques  
viniciuswasques@gmail.com

10 de fevereiro de 2022

# Sumário

- 1 Conjuntos fuzzy
- 2 Operações entre conjuntos fuzzy
- 3 Propriedades de operações entre conjuntos fuzzy
- 4 Os  $\alpha$ -níveis de conjuntos fuzzy
- 5 Cálculo de  $\alpha$ -níveis e os números fuzzy
- 6 Princípio de extensão de Zadeh
- 7 Relações Fuzzy
- 8 T-normas e S-normas
- 9 Implicações Fuzzy

# Introdução

A teoria de conjuntos fuzzy foi introduzida nos anos 60 pelo engenheiro eletricitista e matemático Lofti A. Zadeh. A teoria proposta por ele possibilita incluir aspectos de incertezas na modelagem matemática de certos fenômenos. Essa teoria estabelece que as pertinências de elementos a determinados “conjuntos” são graduados, cujos graus variam entre 0 e 1, em que 1 significa total pertinência e 0 significa a não pertinência ao conjunto fuzzy.

Esse curso concentrado traz conceitos básicos da teoria de conjuntos fuzzy, que surgem através da modelagem de variáveis linguísticas como “em torno de”, “aproximadamente”, “alto” e “baixo” de modo a relaxar a propriedade atribuída à variável.

A formulação matemática de incertezas via lógica fuzzy se diferencia da probabilidade, pois, enquanto a estatística lida com incertezas antes dos eventos ocorrerem, a matemática fuzzy considera incertezas mesmo após o evento. Por exemplo, no lançamento de uma moeda a probabilidade estima a “chance” de cara ou coroa, sendo que após o lançamento não há incerteza. Enquanto a lógica fuzzy infere sobre o resultado, se as faces da moeda não são nítidas.

Além de trazer os conceitos básicos dessa teoria, o curso foca também em aplicações de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, bem como em aplicações em Sistemas p-fuzzy. O objetivo principal é simular soluções de equações diferenciais e/ou diferenças, através de sistemas cujas informações são parcialmente conhecidas.

Para este curso serão utilizados diferentes livros e apostilas. Dentre elas (1; 2; 3; 4).

# Capítulo 1

## Conjuntos fuzzy

Seja  $A$  um conjunto clássico. Definimos o conjunto  $A$  através de uma função que chamamos de característica (indicadora), isto é,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A \\ 1, & \text{se } x \in A \end{cases}.$$

Por exemplo, o conjunto clássico  $[-1, 1]$  é definido pela seguinte função indicadora:

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin [-1, 1] \\ 1, & \text{se } x \in [-1, 1] \end{cases},$$

ou também

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ 1, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

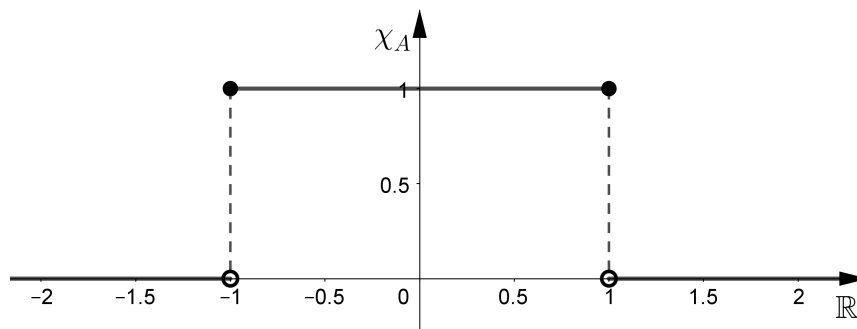


Figura 1.1: Representação gráfica do conjunto clássico  $[-1, 1]$

**Exemplo:** Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\}.$$

Sendo assim, a função indicadora de  $A$  é dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 2k \\ 1, & \text{se } x = 2k \end{cases},$$

para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Ou também

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 2k + 1 \\ 1, & \text{se } x = 2k \end{cases}.$$

**Exemplo:** Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 0\}.$$

Perguntas:

1. Qual o universo que estamos trabalhando?
2. O que é próximo?

Vamos considerar o universo dos números reais positivos e que todo número até 3 é próximo de 0. Assim,  $x \notin A$  se  $x > 3$ . **Sugestão:** Basta colocar “ $x \in A$ , se  $0 \leq x \leq 3$ ”. **PROBLEMA!!!** Perde a noção de “grau de associação” da propriedade *próximo*.

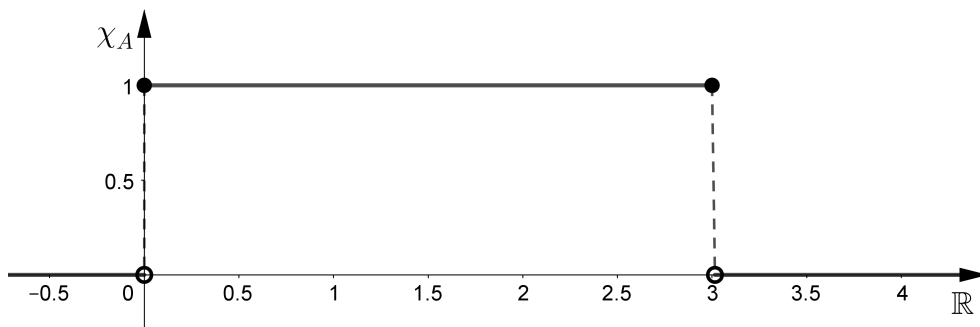


Figura 1.2: Representação gráfica do conjunto clássico  $[0, 3]$

Como lidar com essa modelagem?

Uma função indicadora é da forma  $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$ . Vamos então generalizar essa função para uma da seguinte forma:

$$\varphi_A : U \rightarrow [0, 1].$$

Essa função é chamada de função de pertinência. O conjunto  $A$  definido por essa função é chamado de conjunto *fuzzy*.

Voltando ao exemplo, ao invés de utilizar a caracterização da função indicadora, vamos utilizar a função de pertinência. Isto é,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{3}, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (1.1)$$

**Exemplo:** Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 0\}.$$

Vamos considerar que todo elemento no intervalo  $[-3, 3]$  satisfaz a condição de ser próxima de

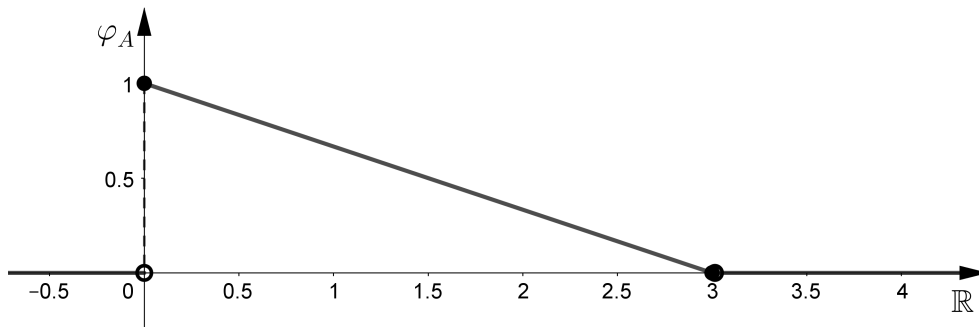


Figura 1.3: Representação gráfica do conjunto fuzzy definido por (1.1)

0. Assim, a função de pertinência de  $A$  é dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{3}, & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ \frac{3-x}{3}, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.2)$$

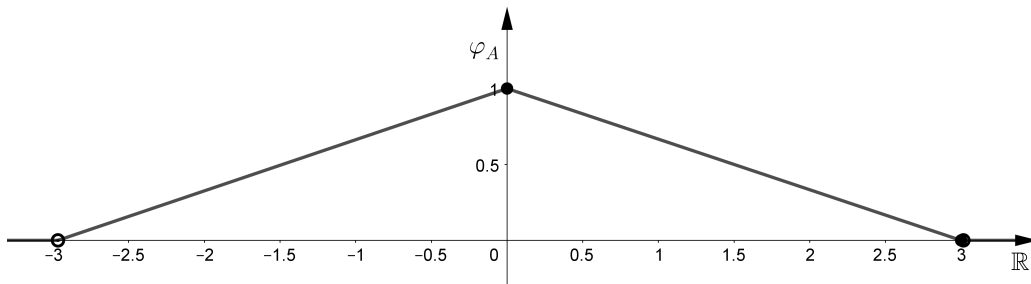


Figura 1.4: Representação gráfica do conjunto fuzzy definido por (5.1)

**Exercício:** Considere o conjunto universo  $U$  da idade das pessoas. Determine o conjunto fuzzy que caracteriza os jovens, isto é, determine a função de pertinência de  $A$ , em que  $A$  é dado por

$$A = \{x \in U : x \text{ é jovem}\}.$$

## Capítulo 2

# Operações entre conjuntos fuzzy

Vamos definir aqui operações entre conjuntos fuzzy. Mas primeiro, vamos relembrar alguns conceitos da teoria conjuntista clássica. Dados dois **conjuntos clássicos**  $A$  e  $B$ , temos que a união, intersecção e complementar (no universo  $U$ ) são dados respectivamente por:

$$A \cup B = \{x \in U : x \text{ está em } A \text{ ou } x \text{ está em } B\},$$

$$A \cap B = \{x \in U : x \text{ está em } A \text{ e } x \text{ está em } B\},$$

e

$$A^c = \{x \in U : x \text{ não está em } A\}.$$

As funções indicadoras de tais conjuntos são dadas respectivamente pela função máximo, mínimo e a diferença entre a função indicadora do universo pela função indicadora de  $A$ . Para visualizar esse fato, veja que

$$\chi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A \cup B \\ 1, & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}.$$

Se  $x \in A \cup B$ , então  $x \in A$  ou  $x \in B$ . Consequentemente,  $\chi_A(x) = 1$  ou  $\chi_B(x) = 1$ . Portanto,  $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1$ . Se  $x \notin A \cup B$ , então  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Consequentemente,  $\chi_A(x) = 0$  e  $\chi_B(x) = 0$ . Portanto,  $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0$ .

Dessa forma, definimos a união pela função indicadora dada por:

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

De modo similar, a intersecção  $A \cap B$  é definida pela função indicadora

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

Para definir o conjunto complementar de  $A$ , denotado por  $A^c$ , precisamos saber o seguinte: Qual é a função indicadora do universo  $U$ ? Como o conjunto universo  $U$  contém todos os elementos, então temos que  $\chi_U(x) = 1$ , para todo  $x \in U$ . Por outro lado, como nenhum elemento pertence ao conjunto vazio  $\emptyset$ , então temos que  $\chi_{\emptyset}(x) = 0$ , para todo  $x \in U$ . Voltando a definição de complementar,

temos que a função indicadora de  $A^c$  é dada por

$$\begin{aligned}\chi_{A^c}(x) &= \chi_U(x) - \chi_A(x) \\ &= 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in U.\end{aligned}$$

Dados dois conjuntos clássicos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A \subseteq B$  se, e somente se,  $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ . Para visualizar essa propriedade, considere três casos:

1.  $x \in A$  e  $x \in B$ ;
2.  $x \notin A$  e  $x \notin B$ ;
3.  $x \notin A$  e  $x \in B$ .

1. Se  $x \in A$  e  $x \in B$ , então  $\chi_A(x) = 1$  e  $\chi_B(x) = 1$ . Logo,  $\chi_A(x) = 1 \leq 1 = \chi_B(x)$ .
2. Se  $x \notin A$  e  $x \notin B$ , então  $\chi_A(x) = 0$  e  $\chi_B(x) = 0$ . Logo,  $\chi_A(x) = 0 \leq 0 = \chi_B(x)$ .
3. Se  $x \notin A$  e  $x \in B$ , então  $\chi_A(x) = 0$  e  $\chi_B(x) = 1$ . Logo,  $\chi_A(x) = 0 \leq 1 = \chi_B(x)$ .

Nesse caso, isto é, se  $A \subseteq B$ , podemos também definir o complementar de  $A$  em  $B$ , por

$$\chi_{B/A}(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x).$$

Tomando tais definições como motivação, estabelecemos que a união, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy são dadas pelas seguintes funções de pertinência.

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\},$$

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$$

e

$$\varphi_{A^c}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad \forall x \in U.$$

Além disso, um conjunto fuzzy  $A$  está contido em um conjunto fuzzy  $B$  ( $A \subseteq B$ ) se, e somente se,  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ , para todo  $x \in U$ .

**Exercício: (para entregar)** Considere os seguintes conjuntos fuzzy  $A$  (jovens),  $B$  (idosos) do universo  $U = [0, 120]$ , e os conjuntos fuzzy  $C$  (baixos) e  $D$  (altos) do universo  $V = [0, 3]$ , cujas funções de pertinência são dadas por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 30] \\ \frac{50-x}{20} & \text{se } x \in [30, 50] \\ 0 & \text{se } x \in [50, 120] \end{cases}, \quad \varphi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 30] \\ \frac{x-30}{20} & \text{se } x \in [30, 50] \\ 1 & \text{se } x \in [50, 120] \end{cases},$$

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0; 1, 4] \\ \frac{2-x}{0,6} & \text{se } x \in [1, 4; 2] \\ 0 & \text{se } x \in [2; 3] \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0; 1, 4] \\ \frac{x-1,4}{0,6} & \text{se } x \in [1, 4; 2] \\ 1 & \text{se } x \in [2; 3] \end{cases}$$

- a) Faça um gráfico para esboçar as funções de pertinência de  $A$  e  $B$ ;
- b) Faça um gráfico para esboçar as funções de pertinência de  $C$  e  $D$ ;



- c) Qual a sua pertinência nos conjuntos  $A$  e  $B$ , segundo esta modelagem?
- d) Qual a sua pertinência nos conjuntos  $C$  e  $D$ , segundo esta modelagem?
- e) Qual a sua pertinência no conjunto das pessoas que são jovens e altas?
- f) Qual a sua pertinência no conjunto das pessoas que são idosas ou baixas?
- g) Como seria o gráfico da função de pertinência  $\varphi_{A \cup B}$ ? Como seria o gráfico da função de pertinência  $\varphi_{C \cap D}$ ?

## Capítulo 3

# Propriedades de operações entre conjuntos fuzzy

Na última aula fizemos um exercício sobre modelagem do conjunto fuzzy das pessoas jovens e idosas. É possível perceber que  $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) = 1$ . Isso significa que podemos escrever o seguinte:

$$\varphi_A(x) = 1 - \varphi_B(x) \quad \text{e também} \quad \varphi_B(x) = 1 - \varphi_A(x).$$

Em outras palavras, os conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  são complementares em  $U$ . Isto é,  $A = B^c$  e  $B = A^c$ . Vimos através do item g) do exercício da última aula, que a função de pertinência de  $A \cap B$  é não nula. Portanto, a intersecção é diferente do vazio. Com isso temos que para conjuntos fuzzy

$$A \cap A^c \neq \emptyset.$$

Na teoria conjuntista clássica temos que  $A \cup A^c = U$ , para qualquer conjunto  $A$ . Por outro lado, na teoria de conjuntos fuzzy essa propriedade não é válida, isto é,  $A \cup A^c \neq U$ , como é possível perceber no item g) do exercício da última aula. Veja que no intervalo entre 30 e 50, a função de pertinência da união  $A \cup B$  é diferente da função constante igual a 1.

**Pergunta:** Quais propriedades da teoria clássica também são válidas na teoria de conjuntos fuzzy?

**Propriedades:** Sejam  $A, B$  e  $C$  conjuntos fuzzy quaisquer. Então são válidas as seguintes propriedades:

1.  $A \cup B = B \cup A$ ;
2.  $A \cap B = B \cap A$ ;
3.  $\emptyset \subseteq A \subseteq U$ ;
4. Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$ ;
5.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;
6.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
7.  $A \cup A = A$ ;

8.  $A \cap A = A$ ;
9.  $\emptyset \cup A = A$ ;
10.  $U \cap A = A$ ;
11.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
12.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
13.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  e  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (**Leis de De Morgan**).

**Demonstração:**

1. Note que  $\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \max\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} = \varphi_{B \cup A}(x)$ .
2. Análogo ao item anterior.
3. Veja que  $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$ , para todo  $x \in U$ . Também,  $\varphi_U(x) = 1$ , para todo elemento  $x \in U$ . Agora perceba que para qualquer conjunto fuzzy  $A$ , temos que  $0 \leq \varphi_A(x) \leq 1$ , uma vez que  $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$ . Sendo assim,

$$\varphi_{\emptyset}(x) = 0 \leq \varphi_A(x) \leq 1 = \varphi_U(x).$$

Portanto,  $\emptyset \subseteq A \subseteq U$ .

4. Exercício.
5. Temos que  $\varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) = \max\{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x)\} = \max\{(\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}), \varphi_C(x)\}$ . Por outro lado,  $\varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x)\} = \max\{\varphi_A(x), (\max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\})\}$ . Vamos supor então os seguintes casos:

- (a)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$
- (b)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$
- (c)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$
- (d)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$
- (e)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$
- (f)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$

Vejamos o caso (a). Assim,

$$\varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) = \max\{(\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}), \varphi_C(x)\} = \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\} = \varphi_C(x).$$

Por outro lado,

$$\varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) = \max\{\varphi_A(x), (\max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\})\} = \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\} = \varphi_C(x).$$

Analogamente, pode-se mostrar para os demais casos. Logo, segue a igualdade.

**Exercício (para entregar):** Demonstre as propriedades 4, 7, 10 e 13.

**Dica para o item 13:** o máximo entre duas funções pode ser escrito da seguinte forma:

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2} (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

e o mínimo é pode ser escrito como

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2} (f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$$

## Capítulo 4

# Os $\alpha$ -níveis de conjuntos fuzzy

Considere uma situação em que o modelador queira levar em conta apenas os elementos que cumprem uma propriedade, estabelecida pelo conjunto fuzzy  $A$ , com um certo grau de associação. Por exemplo, “considere o grupo de pessoas que pertencem ao conjunto dos jovens, com grau de pertinência de pelo menos 0,5.” Com isso fazemos um “corte” no conjunto fuzzy, de modo que apenas os elementos que possuem pertinência maior que aquele corte serão considerados na modelagem (veja Figura 4.1).

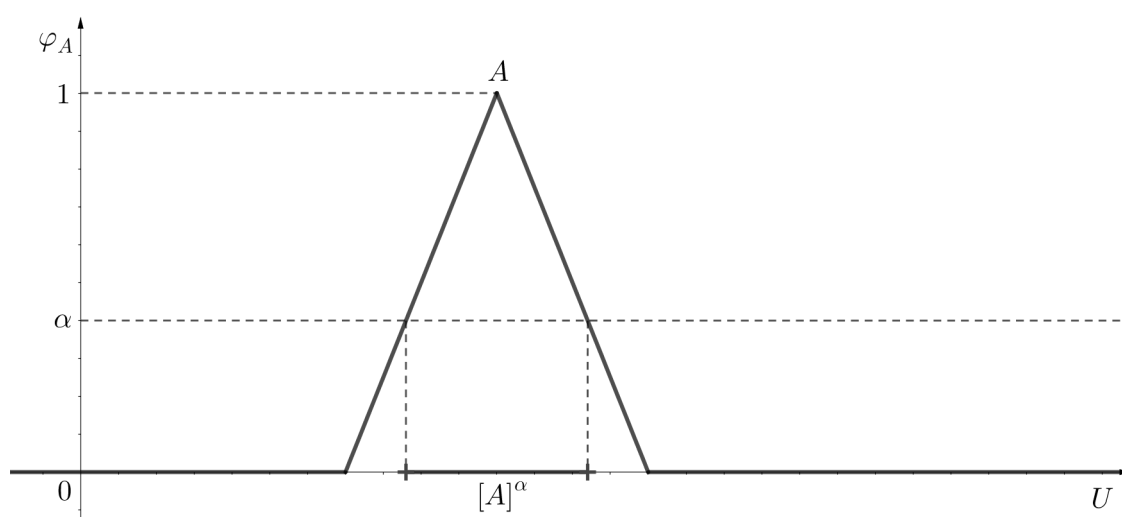


Figura 4.1: Corte do conjunto fuzzy  $A$ , em uma altura  $\alpha \in [0, 1]$ . O conjunto obtido no eixo- $x$ , denotado por  $[A]^\alpha$ , representa o  $\alpha$ -nível de  $A$ .

A partir da ideia de fixar níveis de associação de um elemento  $x$  em um determinado conjunto fuzzy  $A$ , definimos o conceito de  $\alpha$ -níveis, em que  $\alpha \in [0, 1]$  representa o grau de associação do elemento  $x$  em  $A$ . Assim,

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}, \text{ se } \alpha \in (0, 1].$$

$$[A]^0 = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}}.$$

em que a notação  $\overline{Y}$  representa o fecho de um subconjunto  $Y$ .

**Observação 1:** A fim de evitar que o 0-nível seja igual ao conjunto universo  $U$ , a definição do 0-nível é estabelecida de modo diferente da definição para os outros valores de  $\alpha \in (0, 1]$ , como visto acima.

**Observação 2:** é importante ressaltar que o 0-nível, assim como foi definido acima, é consistente apenas

no caso em que  $U$  é um espaço topológico.

**Pergunta:** Quais propriedades os  $\alpha$ -níveis possuem?

1. Se  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ , então  $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$ .

*Dem:* Vamos provar que esse resultado de fato é válido. Primeiro vamos supor  $\alpha > 0$ . Seja  $x \in [A]^\beta$ . Assim, temos que  $\varphi_A(x) \geq \beta$ . Por hipótese, temos que  $\beta \geq \alpha$ . Logo,  $\varphi_A(x) \geq \beta \geq \alpha$ . Portanto,  $\varphi_A(x) \geq \alpha$ , e assim,  $x \in [A]^\alpha$ .

Por fim, vamos supor que  $\alpha = 0$ . Seja  $x \in [A]^\beta$ . Assim,  $\varphi_A(x) \geq \beta$ . Como  $\beta \geq \alpha$ , por hipótese, então  $\varphi_A(x) \geq \beta \geq \alpha = 0$ . Lembre-se que, para  $\alpha = 0$ , temos que  $[A]^0 = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}}$ .

Se  $\varphi_A(x) > 0$ , então  $x \in \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\} \subseteq \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}} = [A]^0$ .

Se  $\varphi_A(x) = 0$ , então  $x \in [A]^\beta = [A]^0 = [A]^\alpha$ .

2. Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos fuzzy de  $U$ . Assim,  $A = B$  se, e somente se  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Exercício (para entregar):**

1. Prove a propriedade 2 acima.

Vamos provar primeiramente a ida do resultado.

Se  $A = B$ , então  $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ , para todo  $x \in U$ . Sendo assim, para  $\alpha \in (0, 1]$

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} = \{x \in U : \varphi_B(x) \geq \alpha\} = [B]^\alpha$$

Para  $\alpha = 0$ , temos que

$$\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\} = \{x \in U : \varphi_B(x) > 0\}.$$

Portanto,

$$[A]^0 = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}} = \overline{\{x \in U : \varphi_B(x) > 0\}} = [B]^0.$$

Logo,  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para  $\alpha \in [0, 1]$ .

Vamos agora provar a recíproca do resultado (volta).

Suponha que  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Por absurdo, suponha que  $A \neq B$ . Isso significa que existe algum  $x_0 \in U$  tal que  $\varphi_A(x_0) \neq \varphi_B(x_0)$ . Consequentemente, temos que  $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$  ou  $\varphi_A(x_0) > \varphi_B(x_0)$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$ . Tome então  $\alpha = \varphi_B(x_0)$ . Note que  $x_0 \in [B]^\alpha = [B]^{\varphi_B(x_0)}$ , pois  $\varphi_B(x_0) \geq \varphi_B(x_0) = \alpha$ . Por outro lado,  $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0) = \alpha$ , logo  $x_0 \notin [A]^\alpha = [A]^{\varphi_B(x_0)}$ . Portanto, temos que  $[A]^\alpha \neq [B]^\alpha$ , contradizendo a hipótese. Assim, concluímos que  $A = B$ .

2. O núcleo de conjunto fuzzy  $A$  é definido pelos elementos que tem total associação com o conjunto fuzzy  $A$ , isto é,

$$\text{Nuc}(A) = [A]^1.$$

Por outro lado, o suporte de um conjunto fuzzy é definido pelos elementos que tem alguma associação não nula com o conjunto fuzzy  $A$ , isto é,

$$\text{supp}(A) = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}.$$

Por fim, o diâmetro (ou chamado também de largura) de um conjunto fuzzy é definido pelo tamanho de seu 0-nível, e está associado com a maior incerteza que ele modela.

Sabendo disso, considere o seguinte conjunto fuzzy:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 4 - x, & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (4.1)$$

Determine o núcleo, suporte e o diâmetro do conjunto fuzzy  $A$ .

3. Desenhe um conjunto fuzzy que cumre as seguintes propriedades:
  - (a) O núcleo é vazio;
  - (b) O 0,5-nível é dado por dois intervalos disjuntos;
  - (c) O 0-nível é dado pelo conjunto universo  $U = \mathbb{R}$ .

## Capítulo 5

# Cálculo de $\alpha$ -níveis e os números fuzzy

Na aula anterior vimos o conceito de  $\alpha$ -níveis de um conjunto fuzzy. Hoje veremos como calcular esse tipo de conjunto (clássico). A partir de agora, consideraremos o conjunto universo  $U$  como sendo o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ .

Considere o seguinte conjunto fuzzy  $A$

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.1)$$

Para  $\alpha \in (0, 1]$ , temos:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) \geq \alpha\}.$$

Para  $1 \leq x \leq 2$ , temos que

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \iff x - 1 \geq \alpha \iff x \geq \alpha + 1$$

Assim, temos que  $\alpha + 1 \leq x \leq 2$ . Isso significa que  $[A]^\alpha = [\alpha + 1, 2]$  em  $[1, 2]$ .

Para  $2 \leq x \leq 3$ , temos que

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \iff 3 - x \geq \alpha \iff x \leq 3 - \alpha.$$

Assim, temos que  $2 \leq x \leq 3 - \alpha$ . Isso significa que  $[A]^\alpha = [2, 3 - \alpha]$  em  $[2, 3]$ .

Para  $\alpha = 0$ , temos:

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\} = (1, 3)$$

Portanto,  $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = \overline{(1, 3)} = [1, 3]$ .

Sendo assim, para  $\alpha \in (0, 1]$ , temos que  $[A]^\alpha = [\alpha + 1, 2] \cup [2, 3 - \alpha] = [\alpha + 1, 3 - \alpha]$ .

Logo, os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são dados por

$$[A]^\alpha = \begin{cases} [\alpha + 1, 3 - \alpha], & \alpha \in (0, 1] \\ [1, 3], & \alpha = 0 \end{cases}.$$



Note que substituindo  $\alpha = 0$  na expressão  $[\alpha + 1, 3 - \alpha]$ , obtemos exatamente  $[1, 3]$ . Portanto, para este exemplo, podemos escrever simplesmente

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha].$$

Vamos definir agora o conceito de números fuzzy.

**Definição:** Um conjunto fuzzy  $A$  é chamado de número fuzzy, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1.  $A$  é um subconjunto fuzzy de  $U = \mathbb{R}$ ;
2. O núcleo de  $A$  é diferente de vazio;
3. Os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos limitados e fechados, para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ;
4. O suporte de  $A$  é limitado.

Note que todo número real é também um número fuzzy (faça um gráfico para se convencer desse fato).

**Exercício: (para entregar)**

1. Considere  $a < u < b$  números reais. Seja  $A$  um conjunto fuzzy, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{u-a}, & x \in [a, u] \\ \frac{x-b}{u-b}, & x \in [u, b] \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Faça um gráfico do conjunto fuzzy  $A$  e mostre que  $A$  é um número fuzzy.

**Observação:** O número fuzzy definido acima é chamado de número fuzzy triangular.

2. Seja  $A$  um conjunto fuzzy, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3}, & x \in [11, 14] \\ 1, & x \in [14, 17] \\ \frac{20-x}{3}, & x \in [17, 20] \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Faça um gráfico do conjunto fuzzy  $A$  e mostre que  $A$  é um número fuzzy.

**Observação:** O número fuzzy definido acima é chamado de número fuzzy trapezoidal.

3. Seja  $A$  um conjunto fuzzy, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [1, 2] \\ \frac{4-x}{2}, & x \in [2, 3] \\ \frac{x-2}{2}, & x \in [3, 4] \\ 5 - x, & x \in [4, 5] \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Faça um gráfico do conjunto fuzzy  $A$ . O conjunto fuzzy  $A$  é um número fuzzy? Justifique.

**Exemplo:** Considere o conjunto fuzzy  $A$  dado pela seguinte função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{2}, & x \in [4, 6] \\ \frac{8-x}{2}, & x \in [6, 8] \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Lembrando que os  $\alpha$ -níveis são dados por  $[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$ , para  $0 < \alpha \leq 1$  e  $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}$ .

Calculemos então os  $\alpha$ -níveis de  $A$ . Para  $0 < \alpha \leq 1$ , temos

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \iff \frac{x-4}{2} \geq \alpha, \quad \text{se } x \in [4, 6],$$

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \iff \frac{8-x}{2} \geq \alpha, \quad \text{se } x \in [6, 8].$$

Portanto,

$$\frac{x-4}{2} \geq \alpha \iff x-4 \geq 2\alpha \iff x \geq 2\alpha+4 \iff 2\alpha+4 \leq x \leq 6, \quad \text{se } x \in [4, 6],$$

$$\frac{8-x}{2} \geq \alpha \iff 8-x \geq 2\alpha \iff x \leq 8-2\alpha \iff 6 \leq x \leq 8-2\alpha, \quad \text{se } x \in [6, 8].$$

Com isso, concluímos que os  $\alpha$ -níveis são dados por

$$[A]^\alpha = [2\alpha+4, 6] \cup [6, 8-2\alpha] = [2\alpha+4, 8-2\alpha], \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Para o 0-nível, temos que  $\text{supp}(A) = (4, 8)$ , e assim,  $\overline{(4, 8)} = [4, 8]$ .

Note que o 0-nível coincide com a definição de  $[A]^\alpha$ , para  $0 < \alpha \leq 1$ , substituindo  $\alpha = 0$ . Isso sempre ocorre para números fuzzy triangulares. Ainda mais, os  $\alpha$ -níveis obtidos pela união dos intervalos (como feito acima) sempre resultará em um intervalo.

A mesma observação feita acima vale para números fuzzy trapezoidais.

**Exemplo:** Considere o seguinte conjunto fuzzy  $A$ , determinado pela seguinte função de pertinência.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x-x^2), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Note que,  $\text{supp}(A) = (0, 1)$ , e portanto,  $[A]^0 = \overline{(0, 1)} = [0, 1]$ . Para  $0 < \alpha \leq 1$ , temos que

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \iff 4(x-x^2) \geq \alpha \iff -4x^2 + 4x - \alpha \geq 0$$

Pela fórmula quadrática temos que:

$$\begin{aligned} x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16\alpha}}{-8} &\iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16(1-\alpha)}}{-8} &\iff x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{(1-\alpha)}}{-8} \\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{(1-\alpha)}}{2} \end{aligned}$$

Obtemos então duas raízes:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha}}{2}$$

Portanto, os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são dados por

$$[A]^\alpha = \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha}}{2} \right].$$

**Exemplo:** Provemos que  $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$  e quaisquer conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$ . Se  $A \cap B = \emptyset$  não há nada a provar. Suponha  $A \cap B \neq \emptyset$ .

(Ida) Seja  $x \in [A \cap B]^\alpha$ , logo  $\varphi_{A \cap B}(x) \geq \alpha$ . Isto é,  $\min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha$ . Note que

$$\varphi_A(x) \geq \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha \Rightarrow \varphi_A(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [A]^\alpha$$

e

$$\varphi_B(x) \geq \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha \Rightarrow \varphi_B(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [B]^\alpha.$$

Portanto,  $x \in [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$ . Assim,  $[A \cap B]^\alpha \subseteq [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$ .

(Volta) Seja  $x \in [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$ . Logo,  $\varphi_A(x) \geq \alpha$  e  $\varphi_B(x) \geq \alpha$ . Portanto,

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha.$$

Logo,  $x \in [A \cap B]^\alpha$ , e assim,  $[A]^\alpha \cap [B]^\alpha \subseteq [A \cap B]^\alpha$ , concluindo a igualdade.

### Exercícios (para entregar):

1. Mostre que  $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ , para qualquer  $\alpha \in [0, 1]$ , e para quaisquer conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$ .
2. Calcule os  $\alpha$ -níveis de  $A \cap B$ , sendo  $A = (1; 2; 3)$  e  $B = (2; 3; 4)$  números fuzzy triangulares.
3. Determine os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy abaixo chamado de *número fuzzy Gaussiano*.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)^2}, & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases},$$

em que  $\delta > 0$  é um valor fixo.

## Capítulo 6

# Princípio de extensão de Zadeh

Hoje falaremos sobre o princípio de extensão de Zadeh, que estende o conceito de função clássica para uma função fuzzy. Uma função fuzzy pode ser determinada de várias formas:

- $F : \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}_F$ . **Exemplo:**  $F((a; b; c)) = 2(a; b; c)$ .
- $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$ . **Exemplo:**  $F(x) = x(a; b; c)$ .

A extensão de Zadeh produz uma função fuzzy do primeiro tipo, mas para isso é necessário ter em mãos uma função clássica  $f : X \rightarrow Y$ . Assim, dado um subconjunto fuzzy  $A \subseteq X$ , temos que o princípio de extensão de Zadeh produz o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Y$ . Em outras palavras, esse princípio produz uma função do tipo  $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ .

Dessa forma, Zadeh propôs a seguinte definição:

**Definição:** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função clássica e  $A \subseteq X$  subconjunto fuzzy. O conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Y$  é definido pela seguinte função de pertinência:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(y) = \sup_{f(x)=y} \varphi_A(x)$$

É importante observar que, se não existir  $x \in X$  de tal forma que  $f(x) = y$ , então atribuímos a pertinência igual a 0. Para isso é necessário estudar a pré-imagem de  $y$ , isto é,  $f^{-1}(y)$ .

A fim de simplificar a notação, é comum ver nas referências, o seguinte:

$$\hat{f}(A)(y) = \sup_{f(x)=y} A(x)$$

**Exemplo:** Sabe-se que um conjunto fuzzy  $A$  tem a seguinte propriedade:  $\varphi_A(-2) = 0.5$ ,  $\varphi_A(-1) = 0.25$ ,  $\varphi_A(0) = 1$ ,  $\varphi_A(1) = 0.25$ ,  $\varphi_A(2) = 0.45$ ,  $\varphi_A(3) = 0.75$ . Considere a função  $f(x) = 2x$ .

- Qual a pertinência de  $y = 6$  no conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ ?

Note que  $x = 3$  é o único elemento na pré-imagem de  $y = 6$ . Então,

$$\hat{f}(A)(6) = \sup_{f(x)=6} A(x) = \sup\{A(3)\} = \sup\{0.75\} = 0.75.$$

Agora considere  $f(x) = x^2$ .

- Qual a pertinência de  $y = 9$  no conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ ?

Note que  $x = 3$  é o único elemento na pré-imagem de  $y = 9$ . Então,

$$\hat{f}(A)(9) = \sup_{f(x)=9} A(x) = \sup\{A(3)\} = \sup\{0.75\} = 0.75.$$

- Qual a pertinência de  $y = 1$  no conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ ? Nesse caso temos dois elementos na pré-imagem de  $y = 1$ , isto é,  $x = -1$  e  $x = 1$ . Assim,

$$\hat{f}(A)(1) = \sup_{f(x)=1} A(x) = \sup\{A(-1), A(1)\} = \sup\{0.25, 0.25\} = 0.25$$

- Qual a pertinência de  $y = 4$  no conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ ? Nesse caso temos dois elementos na pré-imagem de  $y = 4$ , isto é,  $x = -2$  e  $x = 2$ . Assim,

$$\hat{f}(A)(4) = \sup_{f(x)=4} A(x) = \sup\{A(-2), A(2)\} = \sup\{0.5, 0.45\} = 0.5$$

É possível determinar os  $\alpha$ -níveis da extensão de Zadeh de um conjunto fuzzy, através de uma função  $f$ . Se a função  $f$  for contínua e bijetiva, então os  $\alpha$ -níveis de  $\hat{f}(A)$  são dados por:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Em termos gerais, é possível determinar os  $\alpha$ -níveis da seguinte forma:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = \left[ \inf_{x \in [A]^\alpha} f(x), \sup_{x \in [A]^\alpha} f(x) \right], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Exemplo:** Considere o seguinte conjunto fuzzy  $A$ , dado por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são dados por

$$[A]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right].$$

Considere a seguinte função clássica  $f(x) = x^2$ . Como a função  $f$ , restrita ao intervalo  $[0, 1]$  é uma

função contínua e bijetiva, então temos que

$$\begin{aligned}
 [\hat{f}(A)]^\alpha &= \left[ f\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right), f\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right) \right] \\
 &= \left[ \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right)^2, \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right)^2 \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{1 - \alpha} + (1 - \alpha)), \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{1 - \alpha} + (1 - \alpha)) \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{4}(2 - 2\sqrt{1 - \alpha} - \alpha), \frac{1}{4}(2 + 2\sqrt{1 - \alpha} - \alpha) \right]
 \end{aligned}$$

**Exemplo:** Considere o número fuzzy triangular  $A = (-1; 0; 1)$  e a função clássica  $f(x) = x^2$ . Note que  $f$ , restrita ao intervalo  $[-1, 1]$  não é injetora. Portanto, a primeira expressão para o cálculo de  $\alpha$ -níveis não pode ser utilizada.

Perceba que de fato isso é verdade. Os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são dados por  $[A]^\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$ . Se fosse possível a primeira expressão, então teríamos:

$$\begin{aligned}
 [\hat{f}(A)]^\alpha &= [f(-1 + \alpha), f(1 - \alpha)] \\
 &= [(-1 + \alpha)^2, (1 - \alpha)^2] \\
 &= [\alpha^2 - 2\alpha + 1, \alpha^2 - 2\alpha + 1]
 \end{aligned}$$

Note que a expressão acima não é compatível para conjuntos fuzzy. Lembre-se que todo conjunto fuzzy  $A$  deve satisfazer o seguinte: Se  $\beta \geq \alpha$ , então  $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$ . Perceba agora que

$$[\hat{f}(A)]^1 = [0, 0] \not\subseteq [1, 1] = [\hat{f}(A)]^0.$$

Dessa forma é preciso resolver o problema utilizando a segunda expressão, isto é,

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = \left[ \inf_{x \in [-1 + \alpha, 1 - \alpha]} x^2, \sup_{x \in [-1 + \alpha, 1 - \alpha]} x^2 \right], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

A função  $f(x) = x^2$  vai assumir os valores de máximo e mínimo em três possíveis valores:  $x \in \{-1 + \alpha, 1 - \alpha, 0\}$ . Como  $f(-1 + \alpha) = f(1 - \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 = f(0)$ , segue que:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = [0, \alpha^2 - 2\alpha + 1], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Exercício (para entregar):** Determine os  $\alpha$ -níveis da extensão de Zadeh do conjunto fuzzy

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

pela função clássica  $f(x) = x^2$ .

## Capítulo 7

# Relações Fuzzy

Uma relação clássica entre dois universos  $U$  e  $V$  é definido por qualquer subconjunto de  $U \times V$ . Em termos de função, uma relação clássica  $R$  pode ser caracterizada por

$$\chi_R : U \times V \rightarrow \{0, 1\}$$

Isto é, se  $x \in U$  e  $y \in V$  estão relacionados segundo a relação  $R$ , então  $\chi_R(x, y) = 1$ . Caso contrário, ou seja, se eles não estão relacionados conforme a relação  $R$ , então  $\chi_R(x, y) = 0$ .

**Exemplo:** Considere a relação  $R$  de “maior ( $>$ )” em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Pergunta:** O número 4 está relacionado com 2? Sim! Como 4 é maior que 2, temos que  $\chi_R(4, 2) = 1$ . O número 2 está relacionado com 4? Não! Como 2 não é maior que 4, temos que  $\chi_R(2, 4) = 0$ .

Existem diversas propriedades de relações. Algumas delas são:

1. (Reflexiva) Dizemos que uma relação é reflexiva se  $x$  está relacionado com o próprio  $x$ .
2. (Simétrica) Dizemos que uma relação é simétrica, se  $x$  estiver relacionado com  $y$  e  $y$  estiver relacionado com  $x$ .
3. (Transitiva) Dizemos que uma relação é transitiva, se  $x$  estiver relacionado com  $y$ , e  $y$  estiver relacionado com  $z$ , implicar que  $x$  está relacionado com  $z$ .

Um exemplo de relação reflexiva é o de “divisibilidade”. Isso porque todo elemento (não nulo) é divisível por ele mesmo. Um exemplo de relação simétrica é o de “igualdade”. Um exemplo de relação transitiva é o de “maior”.

Em todos esses exemplos mencionados acima, não há incerteza sobre os critérios da relação. Por exemplo, não há dúvidas se dados dois elementos, eles são iguais ou não. No entanto, algumas relações possuem subjetividades.

**Exemplo:** Considere os seguintes animais: Águia, cobra e sapo. Considere a relação de predação. Como a águia preda tanto a cobra quanto o sapo, temos que  $\chi_R(\text{águia}, \text{cobra}) = 1$  e  $\chi_R(\text{águia}, \text{sapo}) = 1$ . Poderíamos ponderar a preferência de predação da águia em relação a cobra e o sapo da seguinte forma:  $\varphi_R(\text{águia}, \text{cobra}) = 0.75$  e  $\varphi_R(\text{águia}, \text{sapo}) = 0.25$ .

Baseados nesse exemplo, definimos:

**Definição:** Uma relação fuzzy nos universos  $U$  e  $V$  são definidos através de qualquer subconjunto fuzzy do cartesiano  $U \times V$ . Isto é, uma relação fuzzy caracterizada pela seguinte função característica:

$$\varphi_R(x, y) : U \times V \rightarrow [0, 1].$$

em que  $\varphi_R(x, y)$  representa o grau de associação em que  $x$  está relacionado com  $y$ , segundo a relação  $R$ .

**Exemplo:** Considere os seguintes animais: águia (a), cobra (c), inseto (i), lebre (l) e sapo (s). Considere também a relação  $R$  de predação, ou seja,  $xRy$ , se  $x$  é predador de  $y$ .

R	a	c	i	l	s
a	0	0	0	0	0
c	1	0,2	0	0	0
i	0,1	0	0,3	0	1
l	1	0,8	0	0	0
s	0,2	1	0	0	0,1

No contexto da teoria de conjuntos fuzzy, também são definidas relações fuzzy reflexivas, simétricas e transitivas.

Quando estamos tratando de uma relação fuzzy em um universo  $X_1 \times X_2$ , dizemos que a relação  $R$  é uma relação fuzzy binária. De um modo geral, uma relação fuzzy em  $X_1 \times \dots \times X_n$ , dizemos que  $R$  é uma relação fuzzy n-ária.

Sejam  $R$  em  $U \times V$  e  $S$  em  $V \times W$ . Definimos a relação de composição entre as relações  $R$  e  $S$  pela relação  $T = R \circ S$  dada por:

$$\varphi_T : U \times W \rightarrow [0, 1]$$

em que

$$\varphi_T(u, w) = \sup_{v \in V} [\min\{\varphi_R(u, v), \varphi_S(v, w)\}]$$

**Obs:** Essa operação é também chamada de operação *max-min*. Embora não seja a mesma coisa, a formulação é parecida com o princípio de extensão de Zadeh para duas variáveis, isto é,

$$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z) = \sup_{f(x,y)=z} \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\}$$

### Exercícios (para entregar):

1. O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy  $A$  de  $U$  e  $B$  de  $V$  é definido pela relação fuzzy  $A \times B$ , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \times B}(x, y) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\}.$$

Sabendo disso, considere  $U = V$  o universo composto por pacientes de um hospital. Sejam  $A$  e  $B$  os conjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e tosse, respectivamente. Para diagnosticar um paciente em relação a determinada doença (Covid, por exemplo), o médico faz uma avaliação com alguns dos pacientes sobre os sintomas apresentados. A febre pode ser dada pelas temperaturas possíveis de um indivíduo e a tosse pela frequência de ocorrência. Após a avaliação, o médico obteve as seguintes respostas:

Responda:



Paciente	(A) Febre	(B) Tosse
1	0,25	0,65
2	0,75	0,4
3	0,9	0,8

- Qual paciente tem um grau de pertinência maior em relação à febre?
- Qual paciente tem o grau de pertinência menor em relação à tosse?
- Qual o grau de pertinência de cada um dos pacientes no conjunto de pessoas que estão com febre e tosse?

2. Uma relação fuzzy binária  $R$  sobre  $U \times U$  é chamada de:

- reflexiva, se  $\varphi_R(x, x) = 1$ ;
- simétrica, se  $\varphi_R(x, y) = \varphi_R(y, x)$ ;
- transitiva, se  $\varphi_R(x, z) \geq \varphi_R(x, y)$  e  $\varphi_R(x, z) \geq \varphi_R(y, z)$ .

Responda:

- O exemplo de predador fornecido anteriormente, satisfaz alguma das relações acima? Se sim, quais?
  - Dê um exemplo de relação fuzzy para cada um dos casos acima e justifique.
3. Considere os seguintes universos  $U = \{\text{Águia, Cobra, Inseto}\}$ ,  $V = \{\text{Cobra, Inseto, Lebre}\}$  e  $W = \{\text{Lebre, Sapo}\}$ . Sejam  $R$  e  $S$  relações fuzzy de predação sobre  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente, cujas pertinências são dadas abaixo:

R	a	c	i
c	1	0,2	0
i	0,1	0	0,3
l	1	0,8	0

e

S	c	i	l
l	0,8	0	0
s	1	0	0

Considere a relação  $T = R \circ S$ . Determine:

- $T(\text{Águia, Lebre})$
- $T(\text{Cobra, Sapo})$
- $T(\text{Inseto, sapo})$

## Capítulo 8

# T-normas e S-normas

Nosso objetivo daqui pra frente é trabalhar com regras do seguinte tipo:

“Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ , então  $z$  é  $C$ .”

ou

“Se  $x$  é  $A$  ou  $y$  é  $B$ , então  $z$  é  $C$ .”

Até aqui já vimos como trabalhar as expressões “ $x$  é  $A$ ”. Agora é necessário aprender os conectivos lógicos *e* e *ou*. Além disso, precisamos aprender a trabalhar com “Se...então” do ponto de vista da lógica fuzzy.

Na lógica clássica os conectivos *e* e *ou* são definidos pelos operadores *mínimo* e *máximo*, respectivamente. Por exemplo, a afirmação “Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ ...” fica  $\min(\chi_A(x), \chi_B(y))$ . Para estender tais operadores lógicos, utilizamos o conceito de t-normas e s-norma (ou também chamado de t-conorma).

**Definição:** Dizemos que o operador  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma t-norma, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Elemento neutro:  $t(1, x) = 1$  e  $t(x, 1) = x$ .
2. Comutativa:  $t(x, y) = t(y, x)$ .
3. Associativa:  $t(x, t(y, z)) = t(t(x, y), z)$ .
4. Monotonicidade: Se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $t(x, y) \leq t(u, v)$ .

Note que o operador mínimo (que generaliza o conectivo lógico clássico *e*) é um exemplo de t-norma. Pois,

1.  $\min\{1, x\} = x$ , pois  $x \in [0, 1]$  e o maior valor possível que  $x$  poderia assumir é 1.
2. Como  $\min\{x, y\} = \min\{y, x\}$ , para quaisquer  $x, y \in [0, 1]$ .
3. Suponha todos os casos, isto é,
  - (a)  $x \leq y \leq z$
  - (b)  $x \leq z \leq y$

- (c)  $y \leq x \leq z$
- (d)  $y \leq z \leq x$
- (e)  $z \leq y \leq x$
- (f)  $z \leq x \leq y$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de forma análoga. Assim,

$$\min(x, \min(y, z)) = \min(x, y) = x.$$

Por outro lado,

$$\min(\min(x, y), z) = \min(x, z) = x.$$

Logo,  $t = \min$  é associativo.

4. Sejam  $x \leq u$  e  $y \leq v$ . Assim, temos os seguintes casos:

- (a)  $x \leq y$  e  $u \leq v$
- (b)  $x \leq y$  e  $v \leq u$
- (c)  $y \leq x$  e  $u \leq v$
- (d)  $y \leq x$  e  $v \leq u$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de modo análogo.

$$\min(x, y) = x.$$

Por outro lado,

$$\min(u, v) = u.$$

Portanto, por hipótese, temos que:

$$\min(x, y) = x \leq u = \min(u, v).$$

Portanto, o operador mínimo satisfaz a propriedade de monotonicidade.

Com isso mostramos que o operador mínimo é uma t-norma. Esse operador é denotado por  $t_{\wedge}$  (ou em algumas referências, por  $t_{\min}$ ).

**Exemplo:** O operador  $t_p$  definido por  $t_p(x, y) = xy$  é chamado de t-norma do produto.

**Exemplo:** O operador  $t_L$  definido por  $t_L = \max(0, x + y - 1)$  é chamado de t-norma de Lukasiewicz.

**Exemplo:** O operador  $t_d$  definido por

$$t_d(x, y) = \begin{cases} x, & y = 1 \\ y, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamado de t-norma drástica.

É possível provar que toda t-norma é limitada pelas t-normas do mínimo e da drástica, isto é, para toda t-norma  $t$ , vale o seguinte:

$$t_d(x, y) \leq t(x, y) \leq t_{\wedge}(x, y)$$

**Definição:** Dizemos que o operador  $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma s-norma, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Elemento neutro:  $s(0, x) = 0$  e  $s(x, 0) = 0$ .
2. Comutativa:  $s(x, y) = s(y, x)$ .
3. Associativa:  $s(x, s(y, z)) = s(s(x, y), z)$ .
4. Monotonicidade: Se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $s(x, y) \leq s(u, v)$ .

Note que o operador máximo (que generaliza o conectivo lógico clássico  $ou$ ) é um exemplo de s-norma.

1. Note que  $\max(0, x) = x$ , porque  $x \in [0, 1]$ , e portanto, 0 é o menor valor que  $x$  pode assumir, isto é,  $0 \leq x$ .
2. Também,  $\max(x, 0) = \max(x, 0)$ .
3. Suponha todos os casos, isto é,

- (a)  $x \leq y \leq z$
- (b)  $x \leq z \leq y$
- (c)  $y \leq x \leq z$
- (d)  $y \leq z \leq x$
- (e)  $z \leq y \leq x$
- (f)  $z \leq x \leq y$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de forma análoga. Assim,

$$\max(x, \max(y, z)) = \max(x, z) = z.$$

Por outro lado,

$$\max(\max(x, y), z) = \max(y, z) = z.$$

4. Sejam  $x \leq u$  e  $y \leq v$ . Assim, temos os seguintes casos:

- (a)  $x \leq y$  e  $u \leq v$
- (b)  $x \leq y$  e  $v \leq u$
- (c)  $y \leq x$  e  $u \leq v$
- (d)  $y \leq x$  e  $v \leq u$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de modo análogo.

$$\max(x, y) = y.$$

Por outro lado,

$$\max(u, v) = v.$$

Assim, temos que

$$\max(x, y) = y \leq v = \max(u, v).$$

Portanto, segue a propriedade de monotonicidade.

Com isso provamos que o operador máximo é um exemplo de s-norma, e é denotado por  $s_{\vee}$  (ou também, denotado por  $s_{\max}$ ).

**Exemplo:** O operador  $s_L$ , chamado de s-norma de Lukasiewicz é definido por  $s(x, y) = \min(1, x + y)$ .

**Exemplo:** O operador  $s_s$  chamado de s-norma da soma é definido por  $s_s(x, y) = x + y - xy$ .

**Exercício (para entregar):**

1. Prove que os operadores  $t_p$  e  $t_L$  são de fato t-normas.
2. Prove que os operadores  $s_L$  e  $s_s$  são de fato s-normas.
3. Um operador  $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é chamado de negação se satisfizer as seguintes propriedades:
  - (a)  $\eta(1) = 0$  e  $\eta(0) = 1$ .
  - (b)  $\eta$  é decrescente.

Mostre que  $\eta_1(x) = 1 - x$  e  $\eta_2(x) = \frac{1-x}{1+x}$  são negações.

4. Dizemos que uma t-norma e uma s-norma são duais em relação a uma negação  $\eta$  (denotamos por  $(t, s)_{\eta}$ ), se satisfazem as leis de De Morgan, isto é,

$$\begin{aligned}\eta(t(x, y)) &= s(\eta(x), \eta(y)) \\ \eta(s(x, y)) &= t(\eta(x), \eta(y)).\end{aligned}$$

Mostre que:

- (a)  $(t_{\wedge}, s_{\vee})_{\eta_1}$  são duais.
- (b)  $(t_L, s_L)_{\eta_1}$  são duais.

## Capítulo 9

# Implicações Fuzzy

Da lógica clássica temos que uma implicação ( $p \Rightarrow q$ ) assume os seguintes valores:

- Se  $p$  é verdadeiro, ou seja, assume o valor 1, e  $q$  for verdadeiro, isto é, assume o valor 1, então a implicação é verdadeira.
- Se  $p$  é verdadeiro, ou seja, assume o valor 1, e  $q$  for falso, isto é, assume o valor 0, então a implicação é falsa.
- Se  $p$  é falso, ou seja, assume o valor 0, e  $q$  for falso, isto é, assume o valor 0, então a implicação é verdadeira.
- Se  $p$  é falso, ou seja, assume o valor 0, e  $q$  for verdadeiro, isto é, assume o valor 1, então a implicação é verdadeira.

Resumindo,

$p$	$q$	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabela 9.1: Tabela verdade clássica

**Definição:** Uma implicação fuzzy é definido por um operador  $\Rightarrow: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  de tal forma que as seguintes condições são satisfeitas:

1. Ela deve reproduzir a tabela verdade clássica;
2. Decrescente em relação a primeira variável, isto é, se  $u \leq x$ , então  $x \Rightarrow y \leq u \Rightarrow y$ ;
3. Crescente em relação a segunda variável, isto é, se  $y \leq v$ , então  $x \Rightarrow y \leq x \Rightarrow v$ .

**Exemplo:** O operador definido por

$$(x \Rightarrow_G y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{se } x > y \end{cases}$$

é chamado de implicação de Gödel.

1. Vamos checar que o operador  $\Rightarrow_G$  reproduz a tabela verdade.

- (a) Se  $x = 0$  e  $y = 0$ , então  $(0 \Rightarrow_G 0) = 1$ ;
- (b) Se  $x = 0$  e  $y = 1$ , então  $(0 \Rightarrow_G 1) = 1$ ;
- (c) Se  $x = 1$  e  $y = 0$ , então  $(1 \Rightarrow_G 0) = 0$ ;
- (d) Se  $x = 1$  e  $y = 1$ , então  $(1 \Rightarrow_G 1) = 1$ .

2. Seja  $u \leq x$ . Vamos considerar os seguintes casos:

- (a) Se  $x \leq y$  e  $u \leq y$ ;
- (b) Se  $x \leq y$  e  $u > y$ ;
- (c) Se  $x > y$  e  $u \leq y$ ;
- (d) Se  $x > y$  e  $u > y$ .

Note que o caso (b) não pode ocorrer, uma vez que se  $x \leq y$  e  $u > y$ , teríamos que  $x < u$ , o que não ocorre por hipótese. Vejamos o caso (a):

$$x \Rightarrow_G y = 1$$

Por outro lado,

$$u \Rightarrow_G y = 1.$$

Assim, em particular segue que

$$(x \Rightarrow_G y) = 1 \leq 1 = (u \Rightarrow_G y)$$

Vejamos o caso (c):

$$x \Rightarrow_G y = y$$

Por outro lado,

$$u \Rightarrow_G y = 1.$$

Assim, segue que

$$(x \Rightarrow_G y) = y \leq 1 = (u \Rightarrow_G y)$$

Vejamos o caso (d):

$$x \Rightarrow_G y = y$$

Por outro lado,

$$u \Rightarrow_G y = y.$$

Assim, em particular segue que

$$(x \Rightarrow_G y) = y \leq y = (u \Rightarrow_G y)$$

3. Considere  $y \leq v$ . Vamos considerar os seguintes casos:

- (a) Se  $x \leq y$  e  $x \leq v$ ;
- (b) Se  $x \leq y$  e  $x > v$ ;
- (c) Se  $x > y$  e  $x \leq v$ ;
- (d) Se  $x > y$  e  $x > v$ .

Note que o caso (b) não pode ocorrer, uma vez que se  $x \leq y$  e  $u > y$ , teríamos que  $x < u$ , o que não ocorre por hipótese. Vejamos o caso (a):

$$(x \Rightarrow_G y) = 1.$$

Por outro lado,

$$(x \Rightarrow_G v) = 1.$$

Assim, em particular segue que

$$(x \Rightarrow_G y) = 1 \leq 1 = (x \Rightarrow_G v).$$

Vejamos o caso (c):

$$(x \Rightarrow_G y) = y.$$

Por outro lado,

$$(x \Rightarrow_G v) = 1.$$

Assim, em particular segue que

$$(x \Rightarrow_G y) = y \leq 1 = (x \Rightarrow_G v).$$

Vejamos o caso (d):

$$(x \Rightarrow_G y) = y.$$

Por outro lado,

$$(x \Rightarrow_G v) = v.$$

Assim, por hipótese segue que

$$(x \Rightarrow_G y) = y \leq v = (x \Rightarrow_G v).$$

Vamos definir agora uma relação fuzzy dada por:

$$\varphi_R(x, y) = (\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y)).$$

Note que da teoria clássica, temos o seguinte:

$$\chi_R(x, y) = (\chi_A(x) \Rightarrow \chi_B(y)) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x \notin A \text{ e } y \text{ qualquer}) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in B) \\ 0 & \text{se } x \in A \text{ e } y \notin B \end{cases}$$

Da teoria clássica, temos que

$$\sup_{x \in U} \min(\chi_A(x), \chi_R(x, y)) = \chi_B(y) \tag{9.1}$$

Para verificar essa igualdade, vamos supor dois casos: (a)  $y \in B$  (b)  $y \notin B$ .

Caso (a): O lado direito é igual a  $\chi_B(y) = 1$ . Por outro lado, temos que  $\chi_R(x, y) = 1$ , pois  $y \in B$ . Assim,

$$\sup_{x \in U} \min(\chi_A(x), \chi_R(x, y)) = \sup_{x \in U} \min(\chi_A(x), 1) = \sup_{x \in U} \chi_A(x) = 1 = \chi_B(y).$$



Caso (b): O lado direito é igual a  $\chi_B(y) = 0$ . Primeiro note que se  $y \notin B$  e  $x \in A$ , então  $\chi_R(x, y) = 0$ . Assim,

$$\sup_{x \in U} \min(\chi_A(x), \chi_R(x, y)) = \sup_{x \in U} \min(\chi_A(x), 0) = \sup_{x \in U} 0 = 0 = \chi_B(y).$$

Por outro lado, se  $y \notin B$  e  $x \notin A$ , então  $\chi_R(x, y) = 1$ . Assim,

$$\sup_{x \in U} \min(\chi_A(x), \chi_R(x, y)) = \sup_{x \in U} \min(0, 1) = \sup_{x \in U} 0 = 0 = \chi_B(y).$$

Baseado na Equação (9.1) generalizamos essa relação para

$$\sup_{x \in U} t(\varphi_A(x), \varphi_R(x, y)) = \varphi_B(y),$$

em que  $t$  representa uma t-norma.

### Exercício (para entregar):

1. Mostre que o operador abaixo, chamado de implicação de Lukasiewicz, é de fato uma implicação fuzzy:

$$(x \Rightarrow_L y) = \min(1 - x + y, 1).$$

A implicação de Lukasiewicz é decrescente na primeira variável. Isto é, se  $x \leq u$ , então devemos concluir que  $(x \Rightarrow_L y) \geq (u \Rightarrow_L y)$ . Se  $x \leq u$ , então  $-x \geq -u$ . Portanto,  $1 - x + y \geq 1 - u + y$ . (Guarde essa informação!) Agora, vamos analisar o mínimo entre  $1 - x + y$  e 1. Se  $1 - x + y \leq 1$ , então  $y \leq x$ . De modo análogo, temos que se  $1 - u + y \leq 1$ , então  $y \leq u$ . Sendo assim, temos os seguintes casos a serem analisados:

- a)  $y \leq x$  e  $y \leq u$ ;
- b)  $y \leq x$  e  $y > u$ ; (Esse caso não ocorre por hipótese)
- c)  $y > x$  e  $y \leq u$ ;
- d)  $y > x$  e  $y > u$ .

2. Mostre que o operador abaixo, chamado de implicação de Wu, é de fato uma implicação fuzzy:

$$(x \Rightarrow_W y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ \min(1 - x, y), & \text{se } x > y \end{cases}$$

3. Uma implicação fuzzy é chamada de S-implicação se puder ser escrita na forma

$$(x \Rightarrow y) = s(\eta(x), y),$$

em que  $s$  é uma s-norma e  $\eta$  é uma negação.

Uma implicação fuzzy é chamada de R-implicação se puder ser escrita na seguinte forma

$$(x \Rightarrow y) = \sup\{z \in [0, 1] : t(x, z) \leq y\},$$

em que  $t$  é uma t-norma.

Mostre que a implicação de Gödel é uma R-implicação (com a t-norma do mínimo) e que a implicação de Lukasiewicz é uma S-implicação.

Observação:

$$(x \Rightarrow_G y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{se } x > y \end{cases}$$

Considere  $x \leq y$ . Nesse caso, temos por definição que  $(x \Rightarrow_G y) = 1$ . Por outro lado, analisemos a seguinte expressão:

$$\sup\{z \in [0, 1] : \min(x, z) \leq y\}$$

Suponha que  $x \leq z$ . Logo, a expressão acima fica:

$$\sup\{z \in [0, 1] : x \leq y\} = 1,$$

uma vez que  $x \leq y$  por hipótese e portanto a condição é satisfeita para qualquer  $z \in [0, 1]$ .

Por outro lado, suponha que  $x > z$ . Logo, temos:

$$\sup\{z \in [0, 1] : z \leq y\}.$$

Note que, se  $z < x$  e por hipótese  $x \leq y$ , então  $z < y$ . Portanto, como a condição é sempre satisfeita, segue que

$$\sup\{z \in [0, 1] : z \leq y\} = 1.$$

Tentem reproduzir o caso em que  $x > y$ .

# Referências

- [1] L. C. Barros, V. F. Wasques, E. Esmi, D. Sanchez, F. Santo Pedro. Sistemas p-fuzzy e aplicações. Notas minicurso CBSF, (2021)
- [2] L. C. Barros e R. C. Bassanezi. Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. IMECC-UNICAMP, (2010)
- [3] R. S. M. Jafelice, L. C. Barros, R. C. Bassanezi. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações. Notas em Matemática Aplicada Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações. (2012)
- [4] G. Klir and B. Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice Hall; first edition, (1995)