Lista de Exercícios 1
Vinícius Francisco Wasques

Tópicos Especiais em Sistemas Fuzzy - Biometria

Exercício 1 *Considere o conjunto universo $X = \mathbb{R}$ e o conjunto fuzzy $A \subseteq X$ definido pela função de pertinência*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3 - x, & 2 < x < 3, \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico da função de pertinência $\mu_A(x)$.

b) Determine os α-níveis $[A]_\alpha$ para $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1$.

Exercício 2 *Considere o universo $X = \mathbb{R}$ e dois conjuntos fuzzy A e B definidos por*

$$\mu_A(x) = \max\{0, 1 - |x - 1|\} \qquad e \qquad \mu_B(x) = \max\{0, 1 - |x - 2|\}.$$

a) Determine explicitamente as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy: $A \cup B$, $A \cap B$, e A^c.

b) Esboce os gráficos das funções de pertinência obtidas.

c) Determine o α-nível de $A \cap B$ para $\alpha = 0.5$.

Exercício 3 *Considere dois conjuntos fuzzy $A, B \subseteq X$ e denote por $[A]_\alpha$ e $[B]_\alpha$ seus respectivos α-níveis.*

a) Mostre que $[A \cup B]_\alpha = [A]_\alpha \cup [B]_\alpha$.

b) Mostre que $[A \cap B]_\alpha = [A]_\alpha \cap [B]_\alpha$.

c) Discuta o significado desses resultados para o cálculo de operações fuzzy via α-níveis.

Exercício 4 (Teorema de Caracterização de Negoita-Ralescu) *Seja* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}$ *uma família de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *tal que, para todo* $\alpha \in (0,1]$, $I_\alpha = [a(\alpha), b(\alpha)]$ *é um intervalo fechado e limitado. Suponha ainda que a família satisfaça as seguintes propriedades:*

a) Se $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, *então*

$$I_{\alpha_2} \subseteq I_{\alpha_1}.$$

b) As funções $a : (0,1] \to \mathbb{R}$ *e* $b : (0,1] \to \mathbb{R}$ *satisfazem*

$$a(\alpha_1) \leq a(\alpha_2), \qquad b(\alpha_1) \geq b(\alpha_2), \qquad \text{sempre que } 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1.$$

c) As funções a *e* b *são contínuas à direita.*

Defina a função $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ *por*

$$\mu(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] \mid x \in I_\alpha\}.$$

a) Mostre que μ *está bem definida e toma valores em* $[0,1]$.

b) Prove que, para todo $\alpha \in (0,1]$,

$$[\mu]_\alpha = I_\alpha,$$

sendo

$$[\mu]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) \geq \alpha\}.$$

c) Conclua que existe um conjunto fuzzy A *em* $\mathbb{R}$ *cuja função de pertinência é* μ *e cujos* α*-níveis são exatamente os intervalos da família* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}$.