Ilum Escola de Ciência

Notas de Matemática: Funções de Variáveis Reais e Integrais de Várias Variáveis

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
Prof. Dr. Mario Martinez

28 de julho de 2022, Campinas

Sumário

Introdução

Este texto traz um breve resumo do conteúdo de **Funções de variáveis reais** e **Integrais de Várias Variáveis**, estudado pela turma 22 da Ilum Escola de Ciência. Esses tópicos abordam problemas e conceitos na área de Cálculo Diferencial e Integral. Normalmente em um curso de cálculo estuda-se limite, continuidade, derivada e integral (seguindo exatamente essa ordem) de funções de uma variável, para depois explorar esses conceitos para funções de várias variáveis.

A ideia deste material é propor um estudo destes conceitos sem fazer separações, e sim, buscando sempre que possível conectá-los. Inicialmente esse material servirá como guia e também um resumo do conteúdo já visto pelos alunos. Os exemplos e exercícios propostos aqui são em sua maioria os mesmos discutidos em sala de aula.

O texto ficará disponível na plataforma Moodle, na aba Material das disciplinas **Funções de variáveis reais** e **Integrais de Várias Variáveis**. Este material será atualizado à medida que o curso for avançando.

Capítulo 1

Funções de uma variável

1.1 Funções reais

O foco de discussão deste capítulo é sobre funções de uma ou mais variáveis. Uma aplicação f que associa elementos x de um conjunto U em elementos $f(x)$ de um conjunto V (essa associação também pode ser denotada por $x \to f(x)$) é chamada de função se tal associação cumpre dois critérios:

1) Todo elemento x deve ser associado;

2) A associação deve ser feita de modo único.

Uma associação que cumpre tais critérios pode ser visualizada na Figura 1.1.

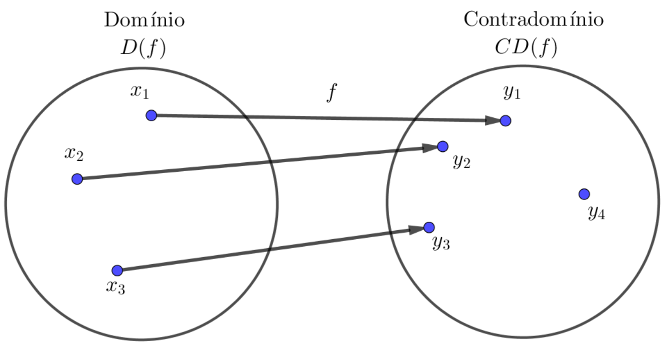


Figura 1.1: Exemplo de associação que representa função

O conjunto U é chamado de *domínio* da função e geralmente é denotado por $D(f)$. O conjunto V é chamado de *contradomínio* da função e geralmente é denotado por $CD(f)$. O subconjunto de $CD(f)$ formado pelos elementos que foram associados por meio da função f é chamado de conjunto *imagem* e é denotado por $Im(f)$.

Formalmente, o conjunto imagem é definido matematicamente por:

$$Im(f) = \{y \in CD(f) : f(x) = y,\ x \in D(f)\}.$$

Uma observação importante é que podem existir elementos do contradomínio que não “receberam flechas” vindas do domínio. Isso não muda o fato de que a aplicação seja uma função. No caso em que todos os elementos do contradomínio recebem “flechas” a aplicação é chamada de função *sobrejetora*. Escrevendo matematicamente essa propriedade tem-se:

$$\forall y \in CD(f), \exists x \in D(f) : f(x) = y.$$

Em outras palavras, o conjunto imagem é igual ao contradomínio.

Uma função é chamada de *injetora* se quaisquer dois elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas. Em termos matemáticos, escreve-se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),\ \forall x, y \in D(f)$. Equivalentemente também pode-se escrever: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,\ \forall x, y \in D(f)$.

A Figura 1.2 ilustra um exemplo de uma função sobrejetora. Note que a aplicação da Figura 1.2 não é uma função injetora. Por outro lado, a Figura 1.3 mostra um exemplo de função injetora que não é sobrejetora. Algumas funções apresentam ambas as características, isto é, são sobrejetoras e injetoras. Estas funções são chamadas de *bijetoras*, e um exemplo é fornecida na Figura 1.4.

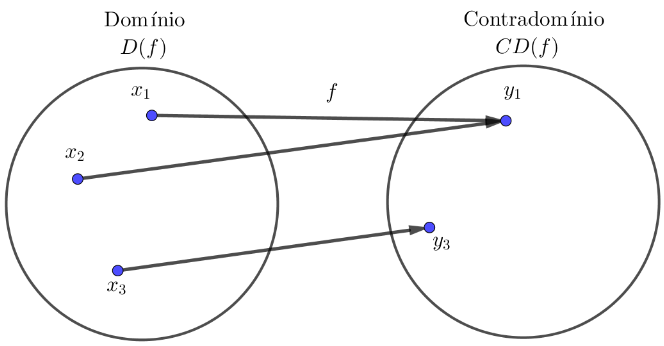


Figura 1.2: Exemplo de função sobrejetora

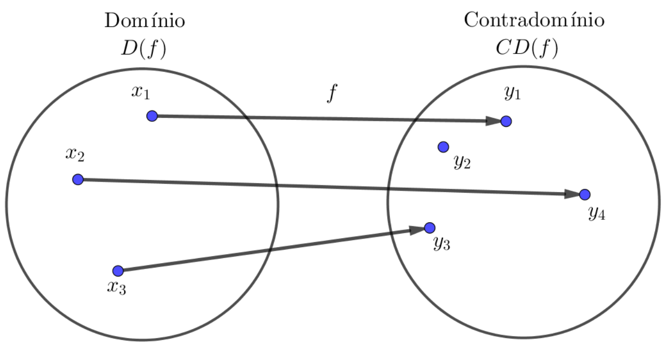


Figura 1.3: Exemplo de função injetora

Os exemplos acima representam casos em que existe um quantidade finita de elementos no domínio, isto é, uma quantidade “contável” $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Agora, como faríamos para representar uma função que tivesse *infinitos* elementos no seu domínio? Por exemplo, considere uma função f que associa um número no dobro do seu valor, isto é, $f(x) = 2x$. Se o domínio da função for $D(f) = \{1, 2, 3\}$, então o conjunto imagem seria $Im(f) = \{2, 4, 6\}$. A Figura 1.5 ilustra essa função.

Agora, considerando o domínio sendo $D(f) = \mathbb{R}$, a representação acima pode não ser das melhores. Nesse caso, utiliza-se o *plano cartesiano* (veja Figura 1.6).

Nessa nova representação, o domínio se torna o eixo “deitado” x, e o contradomínio se torna o eixo “em pé” y. O eixo-x também é chamado de eixo da *abscissa*, enquanto o eixo-y é chamado de

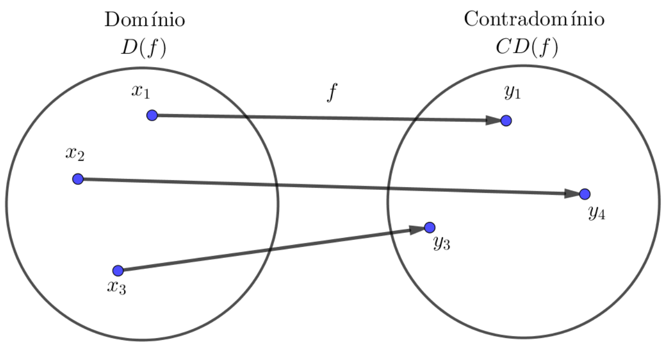


Figura 1.4: Exemplo de função bijetora

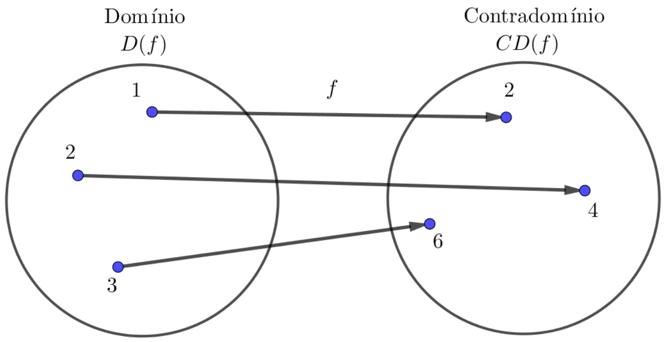


Figura 1.5: Exemplo da função $f(x) = 2x$, com domínio $D(f) = \{1, 2, 3\}$

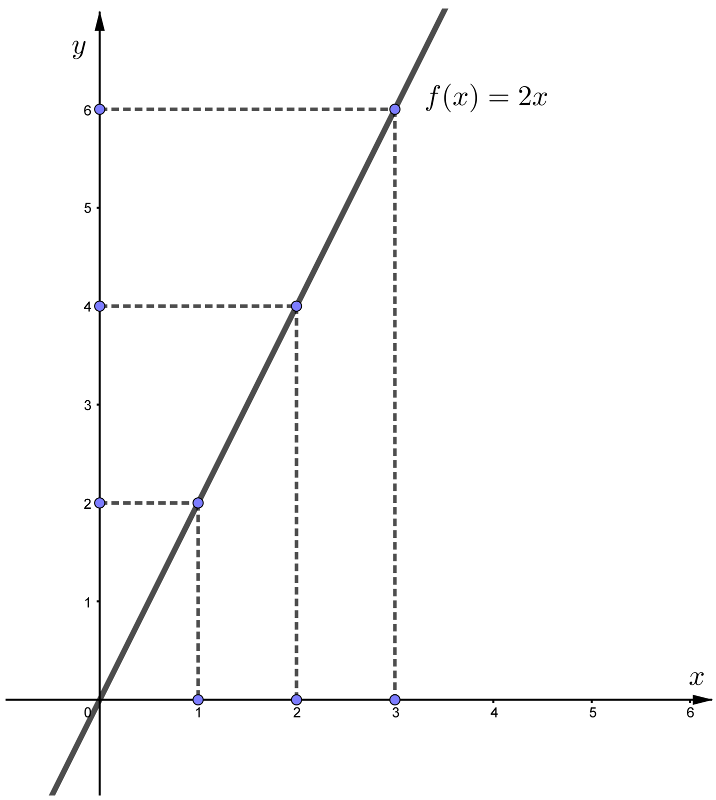


Figura 1.6: Exemplo da função $f(x) = 2x$, com domínio $D(f) = \mathbb{R}$

eixo da *ordenada*. Os elementos que se encontram no eixo-y e que são a "altura" de algum elemento do eixo-x formam o conjunto imagem. Veja que agora não só é possível representar a associação dos elementos $\{1, 2, 3\}$ como apresentado na Figura 1.5, mas também é possível visualizar a associação de qualquer elemento x do domínio com seu respectivo elemento da imagem y.

Exercício 1.1.1 *Faça a representação gráfica das seguintes funções no plano cartesiano:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = -x$*;*
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = -x^2$*;*
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$*;*
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = cos(x)$*;*
5. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sqrt{x}$*;*
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = e^x$*;*

Exercício 1.1.2 *Verifique quais das funções do exercício anterior são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.*

Exercício 1.1.3 *Dê um exemplo de função que é injetora, mas não é sobrejetora. Dê um outro exemplo de função que é sobrejetora, mas não é injetora.*

Exercício 1.1.4 *Considere as funções trigonométricas dadas por*

$$f(x) = sen(x), \quad g(x) = sen(2x) \quad \text{e} \quad h(x) = 2sen(x)$$

Com o auxílio do GeoGebra, selecione a opção que NÃO cumpre as características das funções apresentadas acima:

1. *As funções* f*,* g *e* h *são periódicas.*
2. *As funções* f *e* h *possuem o mesmo período, mas amplitudes diferentes.*
3. *As funções* f *e* g *possuem a mesma amplitude, mas diferentes períodos.*
4. *As funções* f*,* g *e* h *possuem o mesmo domínio dos números reais* $\mathbb{R}$.
5. *As funções* f*,* g *e* h *possuem a mesma imagem* $[-1, 1]$

Exercício 1.1.5 *Considere as funções dadas por*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{e} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

Com o auxílio do GeoGebra, selecione a opção que NÃO cumpre as características das funções apresentadas acima:

1. *A função f só assume valores positivos, isto é,* $f(x) \geq 0, \ \forall x \in D(f)$
2. *O domínio da função g é dado pelo seguinte conjunto* $D(g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

3. *A função* $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é uma função sobrejetora.*
4. *A função g admite um "salto" em* $x = 1$.
5. *O domínio da função f é dada por* $D(f) = \mathbb{R}$

Exercício 1.1.6 *Considere as funções do tipo exponencial dadas por*

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{2x} \quad \text{e} \quad h(x) = e^{-x},$$

em que o símbolo e representa o número (irracional) de Euler.

Com o auxílio do GeoGebra, selecione a opção que NÃO cumpre as características das funções apresentadas acima:

1. *As funções f e g são crescentes*
2. *A função h é uma função decrescente que nunca cruza a abscissa (eixo-x)*
3. *As funções f, g e h cruzam a ordenada (eixo-y) no mesmo ponto.*
4. *As funções f, g e h satisfazem:*

$$D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad Im(f) = Im(g) = Im(h) = \mathbb{R}^+$$

5. *Existe um valor de x no domínio da função f de tal forma que* $f(x) = 0$.

Exercício 1.1.7 *Quais das funções abaixo podem ser classificadas como funções injetoras?*

1. $f(x) = sen(x)$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = ln(x)$, *em que* $ln(x)$ *representa a função logarítmica na base* e, *chamada de número de Euler*[1].
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = x^3 + x^2$

Exercício 1.1.8 *Considere a seguinte função de duas variáveis:*

$$f(x, y) = \frac{x}{x - y}$$

Então é errado afirmar que:

1. *A função assume o valor zero apenas se for aplicada em pontos da forma* $(0, y)$, *sendo* y *um valor real qualquer não nulo*
2. *O domínio desta função é dada por* $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$
3. *A interpretação geométrica para o domínio dessa função é dada pelo plano cartesiano menos os pontos da reta identidade*

[1] O número irracional e é uma constante matemática que é a base dos logaritmos naturais. Esse número pode ser obtido através de um conceito chamado de *limite* que veremos no próximo tópico.

4. *A função é injetora*

5. *A função satisfaz* $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = 3$

Exercício 1.1.9 *Considere as funções de duas variáveis dadas por*

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad e \quad h(x, y) = \sqrt{1 - 2x^2 - 3y^2}$$

As funções f, g e h são chamadas de superfícies quádricas, e representam um Parabolóide Elíptico, Cone e um Elipsóide, respectivamente. Com o auxílio do GeoGebra, plote tais superfícies utilizando a visualização em 3D. Imagine agora que esteja fazendo "cortes"em cada superfície, de tal modo que esses cortes sejam paralelos ao plano xy. Descreva abaixo que tipo de curvas vocês obtiveram ao cortar as superfícies.

1.2 Limite de funções e aplicações

O conceito de limite é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor. Por exemplo, considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \in [0, 1) \\ x^3 + x + 1 & , x \in (1, \infty) \\ 2,5 & , x = 1 \end{cases}, \tag{1.1}$$

cuja representação é dada na Figura 1.7.

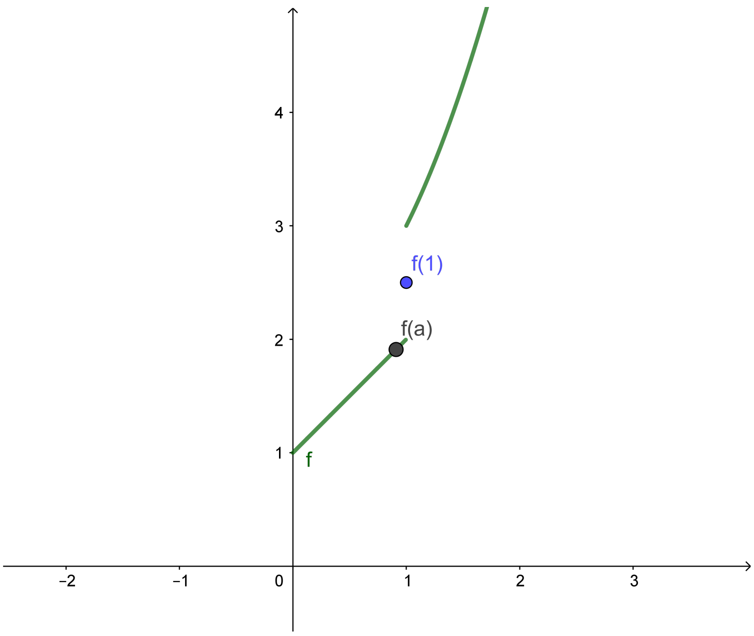
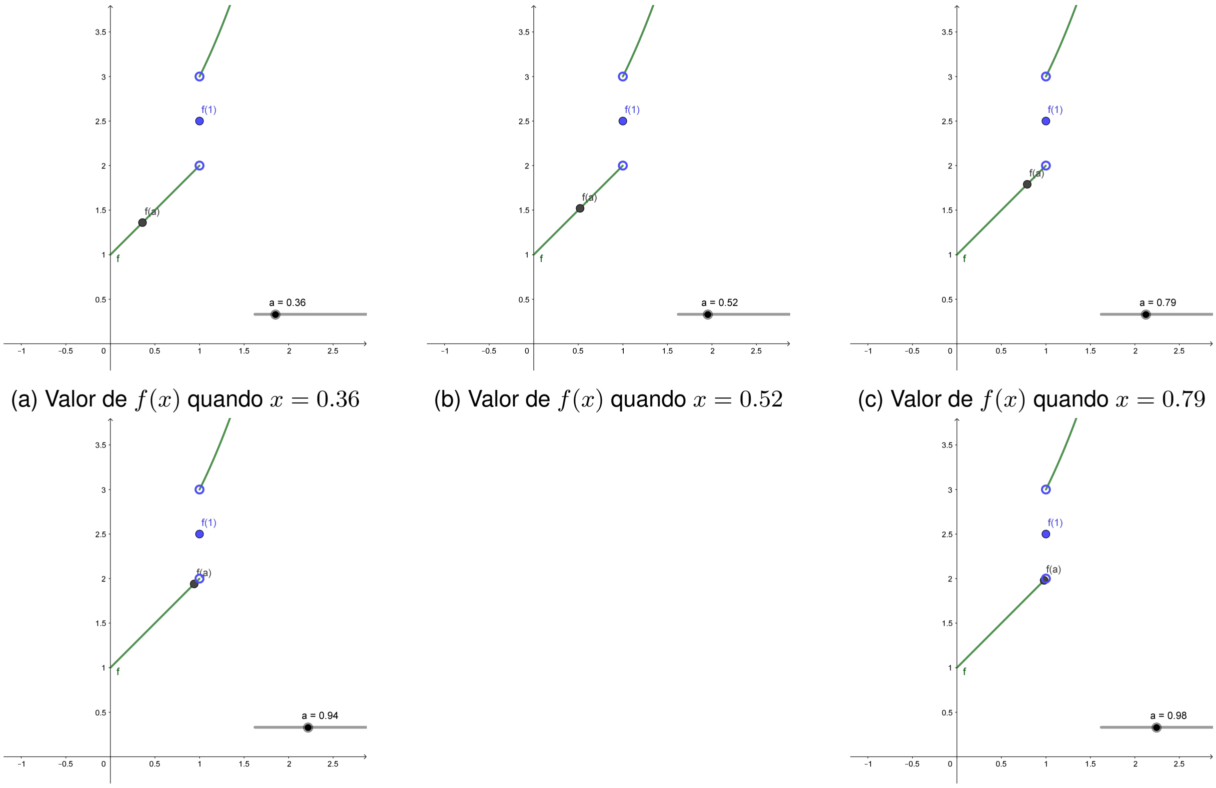


Figura 1.7: Função $f(x)$ dada por (1.1)

Observação 1.2.1 *Funções do tipo (1.1), isto é, funções cuja lei de associação não são definidas de uma única forma, são chamadas de* funções definidas por partes.

O conceito de limite pode ser utilizado para estudar comportamentos locais de funções. Por exemplo, no ponto $x = 1$ tem-se que a função $f(x)$ dada em (1.1) se aproxima do valor $f(x) = 2$ se x se aproximar de 1 pela esquerda (veja as Figuras 1.8a, 1.8b, 1.8c, 1.8d e 1.8e).



(a) Valor de $f(x)$ quando $x = 0.36$

(b) Valor de $f(x)$ quando $x = 0.52$

(c) Valor de $f(x)$ quando $x = 0.79$

(d) Valor de $f(x)$ quando $x = 0.94$

(e) Valor de $f(x)$ quando $x = 0.98$

Figura 1.8: Limite da função (1.1) quando x tende a 1 pela esquerda.

Nesse caso, representamos esse comportamento pela seguinte notação:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2, \tag{1.2}$$

ou de um modo geral,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1. \tag{1.3}$$

A notação (1.3) é lida da seguinte forma: “O limite da função $f(x)$, quando x tende a x_0 pela esquerda é igual a L_1”.

O mesmo pode ser feito para o estudo do limite à direita do ponto $x = 1$. Nesse caso, a função $f(x)$ se aproxima de 3, isto é,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3, \tag{1.4}$$

ou de um modo geral,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2. \tag{1.5}$$

A notação (1.5) é lida da seguinte forma: “O limite da função $f(x)$, quando x tende a x_0 pela direita é igual a L_2”.

Veja que nesse caso tem-se que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq 2,5 = f(1)$$

e também,

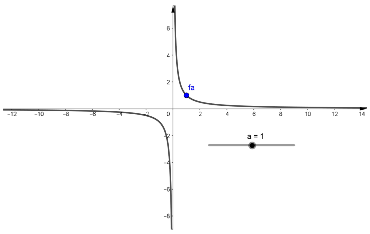
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \neq 2,5 = f(1).$$

Essas situações caracterizam o que chamamos de “salto”. Ou seja, quando o limite de uma função não é igual ao valor da função naquele ponto.

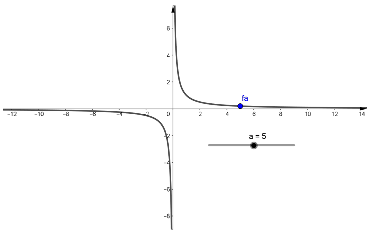
Os limites apresentados em (1.3) e (1.5) são chamados de *limites laterais*. Quando os limites laterais coincidem, isto é, quando $L_1 = L_2$, então dizemos que o limite da função existe. Nesse caso, denotamos o limite simplesmente por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L. \tag{1.6}$$

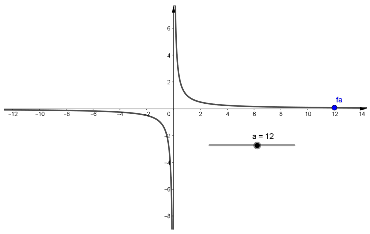
Observação 1.2.2 *É possível também estudar o comportamento de funções quando o valor de x cresce (decresce) indefinidamente, a partir do conceito de limite. Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ se aproxima de 0 quando x cresce indefinidamente (x tende a ∞). Por outro lado, a mesma função também se aproxima de 0 quando x decresce indefinidamente (x tende a $-\infty$), como é possível observar na Figura 1.14.*



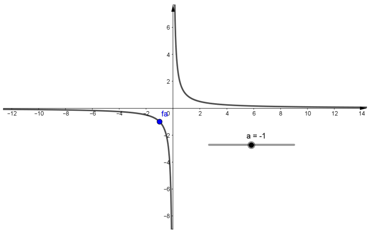
(a) Valor de $f(x)$ quando $x = 1$



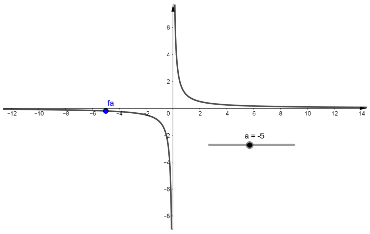
(b) Valor de $f(x)$ quando $x = 5$



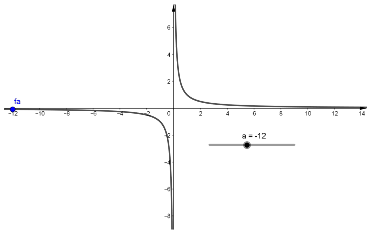
(c) Valor de $f(x)$ quando $x = 12$



(d) Valor de $f(x)$ quando $x = -1$



(e) Valor de $f(x)$ quando $x = -5$



(f) Valor de $f(x)$ quando $x = -12$

Figura 1.9: Limite da função $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x tende a ∞ (Subfiguras 1.9a, 1.9b e 1.9c) e limite da função $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x tende a $-\infty$ (Subfiguras 1.9d, 1.9e e 1.9f).

Nesse caso, denotamos esses limites por:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = M_1. \tag{1.7}$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M_2. \tag{1.8}$$

Um exemplo bem conhecido de limite infinito é o $\lim_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n$, cujo valor resulta no número de Euler $e = 2,718...$, isto é,

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.9}$$

Para a leitora que tiver curiosidade sobre o limite apresentado em (1.9), recomendamos a leitura do livro Guidorizzi (2001).

Exercício 1.2.1 *Faça um esboço de uma função que possui limites laterais distintos em x_0.*

Exercício 1.2.2 *Faça um esboço de uma função que possui limite em x_0, mas que também apresente um salto neste ponto.*

Exercício 1.2.3 *Faça um esboço de uma função que possui limite em x_0 e que tal limite coincida com o valor da função no ponto x_0. Em termos de gráfico, qual a diferença entre a função que você desenhou com a função esboçada no* ***Exercício 1.2.2****?*

Exercício 1.2.4 *Determine os seguintes limites:*

1. $\lim\limits_{x \to 1} 2x$
2. $\lim\limits_{x \to 0} e^x$
3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, *sendo*
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [0,2) \\ x^2 & , x \in (2,4] \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} ln(x)$

1.2.1 Continuidade

Através do conceito de limite podemos estudar o comportamento de funções, no sentido de qual valor a função se aproxima quando seu argumento chega próximo de um valor escolhido. Vimos que nem sempre a função assume de fato o valor estudado pelo limite, e com isso apresenta uma mudança brusca de comportamento ao qual chamamos de “salto”.

Funções que apresentam saltos em um determinado ponto x_0 serão chamadas de *funções descontínuas*. Quando não houver essa mudança brusca de comportamento, ou seja, quando não houver salto em determinado ponto, diremos que essa função é *contínua*.

Para formalizar essa ideia é necessário então conectar o valor que a função assume em determinado ponto x_0, com o limite da função quando x tende a esse ponto. Assim, para que uma função seja contínua em x_0, deve ocorrer:

1. O limite da função no ponto x_0 tem que existir, ou seja, os limites laterais existem e são iguais;
2. O ponto x_0 deve pertencer ao domínio da função f, ou seja, $x_0 \in D(f)$;
3. O limite da função em x_0 deve ser igual ao valor da função no ponto, ou seja,
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observação 1.2.3 *Perceba que só faz sentido estudar a continuidade de uma função em determinado ponto x_0, se a função estiver definida nesse ponto, ou seja, $x_0 \in D(f)$. Caso contrário, não há o que comparar com o limite da função f no ponto (mesmo que esse limite exista!).*

Os exemplos a seguir servem para ilustrar cada ponto descrito acima.

Exemplo 1.2.1 *Considere a função dada em (1.1), isto é,*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [0,1) \\ x^3+x+1 & , x \in (1,\infty) \\ 2,5 & , x = 1 \end{cases}.$$

Vamos estudar a continuidade no ponto $x = 1$ (veja que faz sentido estudar a continuidade nesse ponto, uma vez que $1 \in D(f)$, e mais, $f(1) = 2,5$. Primeiro, veja que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^3+x+1 = 3.$$

Sendo assim, os limites laterais são distintos, e portanto não existe limite no ponto $x = 1$. Logo, a função é descontínua em $x = 1$.

Exemplo 1.2.2 *Considere a função $f(x)$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

.

Vamos estudar a continuidade da função (1.10) no ponto $x = 1$. Primeiro, veja que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x = e.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^x = e.$$

Sendo assim, os limites laterais são iguais. Portanto existe limite no ponto $x = 1$, e mais, o limite vale $e = 2,718...$. No entanto, a função definida em (1.10) estabelece que $f(1) = 1$. Logo, o limite da função não coincide com o valor da função no ponto. Portanto, a função f é descontínua em $x = 1$ (veja o gráfico dessa função na Figura 1.10).

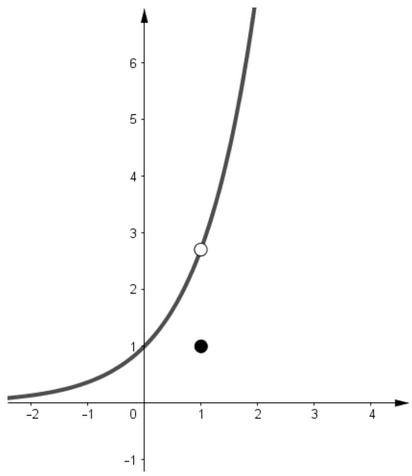


Figura 1.10: Gráfico da função definida em (1.10)

Exemplo 1.2.3 *Considere a função $f(x)$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 1 & , x \neq 1 \\ 4 & , x = 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

.

Vamos estudar a continuidade da função (1.10) no ponto $x = 1$. Primeiro, veja que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 + 2x^2 + 1 = 4.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^3 + 2x^2 + 1 = 4.$$

Sendo assim, os limites laterais são iguais. Portanto existe limite no ponto $x = 1$, e mais, o limite vale 4. Veja também que a função definida em (1.11) estabelece que $f(1) = 4$. Logo, o limite da função coincide com o valor da função no ponto, isto é,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1).$$

Portanto, a função f é contínua em $x = 1$ (veja o gráfico dessa função na Figura 1.11).

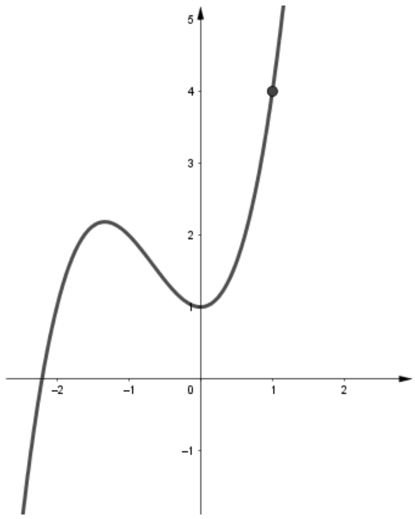


Figura 1.11: Gráfico da função definida em (1.11)

Exemplo 1.2.4 *Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, cujo gráfico pode ser visto na Figura 1.14. Veja que mesmo havendo uma mudança brusca de comportamento da função em torno de $x = 0$, a função não está definida neste ponto, isto é, $x_0 \notin D(f)$. Isso significa que não faz sentido estudar continuidade neste ponto. Como em qualquer outro ponto $x_0 \in D(f)$ o limite da função coincide com o valor $f(x_0)$, temos que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo o seu domínio.*

Observação 1.2.4 *Perceba que se no **Exemplo 1.2.4** a função estivesse definida em $x = 0$, então a função seria descontínua nesse ponto, por qualquer que seja o valor escolhido para $f(0)$. Isso ocorre porque os limites laterais são distintos (limite à esquerda vai $-\infty$ e o limite à direita vai para ∞), e portanto, não existiria o limite no ponto.*

Como visto na **Observação 1.2.4**, o estudo de continuidade de uma função depende não só do limite, mas também dos pontos que estão no seu domínio. Dizemos então que uma função é contínua, se for contínua em todos os pontos de seu domínio, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in D(f).$$

Exercício 1.2.5 *Uma* função escada *(step function, em inglês) é definida como sendo uma função que assume um valor constante em cada subintervalo de seu domínio. Por exemplo, a função* $f : [0, 2.5] \to \mathbb{R}$, *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, 0.5) \\ 0.5 & , x \in [0.5, 1) \\ 1 & , x \in [1, 1.5) \\ 1.5 & , x \in [1.5, 2) \\ 2 & , x \in [2, 2.5] \end{cases}$$

e ilustrada na figura abaixo é um exemplo de função escada.

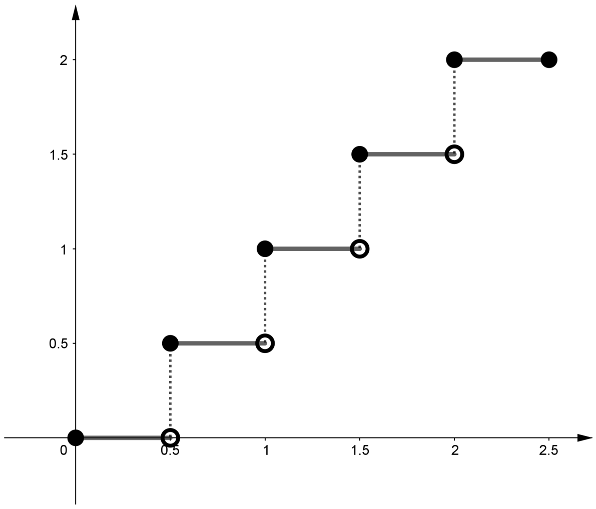


Figura 1.12: Representação de uma função do tipo escada.

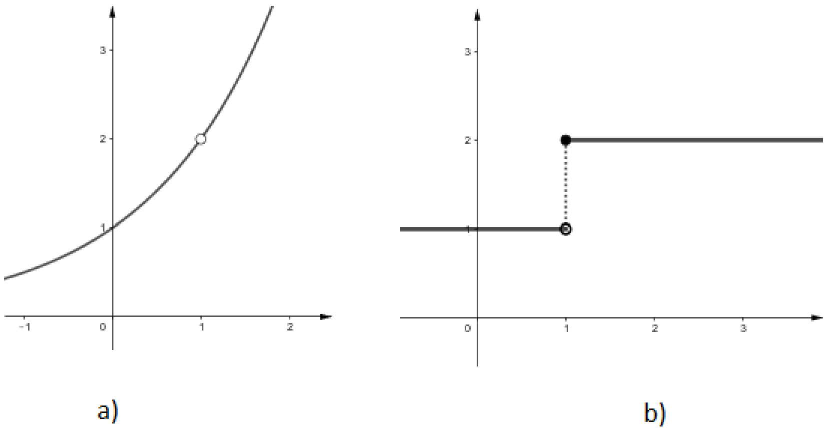
A partir dessa definição e do exemplo citado acima, quais das alternativas não caracterizam uma função escada.

1. *Funções escadas podem admitir saltos*
2. *Funções escadas podem ser descontínuas*
3. *Em cada subintervalo, a função não apresenta "inclinação"*
4. *A função ilustrada na imagem, apesar de admitir saltos, é um exemplo de função contínua*
5. *Todas as alternativas estão corretas.*

Observação 1.2.5 *Em momentos convenientes denotaremos números decimais por pontos, ao invés de vírgulas. Isto é, denotaremos por exemplo 1,5 por 1.5. No **Exercício** 1.2.5 a fim de diferenciar a vírgula do intervalo, da vírgula referente a casa decimal, optamos por denotar a casa decimal por ponto.*

Exercício 1.2.6 *Considere as duas funções cujos gráficos são dados abaixo:*

Baseado no gráfico, selecione todas as afirmações abaixo que são verdadeiras.



1. *As funções a) e b) possuem um "salto"em x=1.*
2. *As funções a) e b) são descontínuas em x=1.*
3. *Apesar da função a) admitir um salto, ela é contínua em todo o seu domínio.*
4. *Apesar da função b) admitir um salto, ela é contínua em todo o seu domínio.*
5. *As funções a) e b) são contínuas em x=1.*

Exercício 1.2.7 *Pense e apresente um exemplo de função cujo domínio é dado pelo conjunto dos números reais, que seja descontinua em todo o seu domínio. Argumente o fato da função escolhida ser descontínua em todos os pontos.*

1.2.2 Derivada e integral

Falaremos agora sobre duas das mais importantes aplicações de limites na área do cálculo, a derivada e a integral de uma função. Nossa motivação para estudar a ferramenta *derivada* é determinar a inclinação de uma função de uma forma prática, enquanto que a ferramenta *integral* é motivada para o cálculo de área de uma região determinada por uma função.

Vamos começar tratando de integrais. Uma das figuras que é mais simples de se calcular a área são retângulos, uma vez que para obter tal área basta calcular o produto entre o tamanho da base pela altura. A partir de áreas de retângulos é possível estimar a área de regiões mais complexas. De um modo prático, como fazemos isso? Considere a região formada pela função $f(x) = 2x$ e o eixo da abscissa, entre os valores 0 e 1, conforme a Figura 1.13.

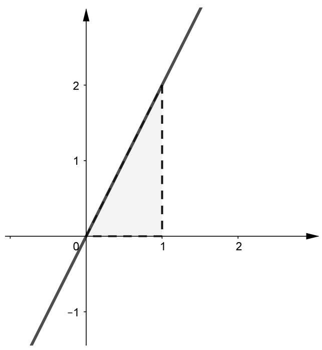


Figura 1.13: Região determinada pela função $f(x) = 2x$ e o eixo da abscissa, entre os valores 0 e 1.

A região obtida através das limitações mencionadas acima formam um triângulo, e como se sabe, sua área é dada por base multiplicada pela altura e tudo isso dividido por dois, isto é,

$$\text{Área}_{\triangle} = \frac{b.h}{2},$$

que no caso particular da Figura 1.13 é dada por $\frac{1.2}{2} = 1$.

O cálculo da área do triângulo se tornou bem simples porque já se conhece uma fórmula para isso. Suponha por um momento que tal fórmula não fosse conhecida. Sendo assim, poderíamos tentar aproximar a área do triângulo apenas por área de retângulos. A primeira tentativa seria pegar o tamanho do intervalo $[0, 1]$ como base do retângulo (denotada por $1 - 0 = x_1 - x_0 = \Delta(x_1)$) e a altura poderia ser, por exemplo, o maior valor que a função assume nesse intervalo, o caso da Figura 1.13 seria $f(x_1) = f(1)$. Com isso teríamos a seguinte aproximação (veja a Figura 1.14a)

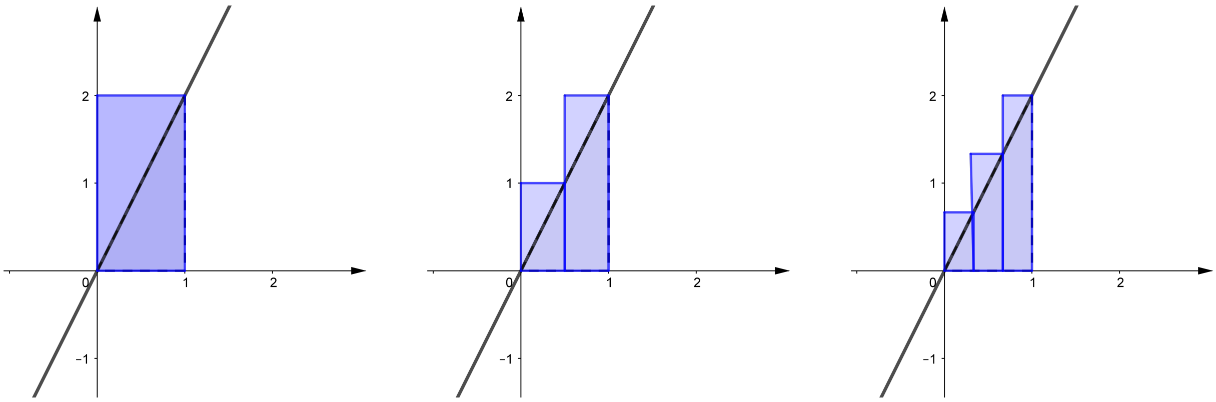
$$\text{Área}_{\square} = \Delta(x_1)f(x_1) = 1.2 = 2. \tag{1.12}$$

A fim de melhorar essa aproximação, podemos considerar um ponto intermediário no intervalo $[0, 1]$, por exemplo, $x = \frac{1}{2}$. Com isso teríamos dois retângulos, um com base $\Delta(x_1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ e altura $f(\frac{1}{2}) = 1$ e outro com base $\Delta(x_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e altura $f(1) = 2$, obtendo a aproximação (veja a Figura 1.14b)

$$\text{Área}_{\square} = \Delta(x_1)f(x_1) + \Delta(x_2)f(x_2) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}. \tag{1.13}$$

Veja que a aproximação obtida em (1.13) foi melhor do que a obtida em (1.12). Repetindo esse processo, isto é, considerando mais pontos no intervalo $[0, 1]$, digamos $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, obtemos a seguinte aproximação (veja a Figura 1.14c)

$$\text{Área}_{\square} = \Delta(x_1)f(x_1) + \Delta(x_2)f(x_2) + \Delta(x_3)f(x_3) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{4}{3} + \frac{1}{3}.1 = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = 1. \tag{1.14}$$



(a) Área aproximada referente à $\mathcal{P} = \{0, 1\}$

(b) Área aproximada referente à $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

(c) Área aproximada referente à $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

Figura 1.14: Aproximação de área da região exibida na Figura (1.13), via somas de Riemann para diferentes partições, cuja área é 1. A aproximação da Subfigura 1.14a foi de 2, da Subfigura 1.14b foi de $\frac{3}{2}$ e da Subfigura 1.14c foi de 1.

Perceba que a aproximação fica cada vez melhor à medida que consideramos mais ponto na "base" da região. Sendo assim, para obter uma boa aproximação devemos considerar um conjunto de pontos $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ cada vez "maior". Esse conjunto $\mathcal{P}$ é chamado de *partição*. Este processo de aproximação de uma determinada área, através de somas de área de retângulos é chamado de *somas de Riemann*.

Observação 1.2.6 *Apesar do processo apresentado em* (1.14) *dar exatamente o valor da área do triângulo, temos que os valores obtidos através desse processo são apenas aproximações, de modo que quanto mais pontos são considerados na partição $\mathcal{P}$, melhor é a aproximação.*

Perceba que na abordagem acima a altura dos retângulos foi escolhida como sendo o maior valor que a função assume em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, isto é, $\max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. A soma

$$\Delta(x_1)f(x_1) + \ldots + \Delta(x_n)f(x_n),$$

a partir dessa escolha é chamada de *soma superior de Riemann*, e em geral, denotamos por:

$$S(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i)f(x_i) = \Delta(x_1)f(x_1) + \ldots + \Delta(x_n)f(x_n),$$

em que $\mathcal{P}$ é a partição $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

A escolha da altura pode ser feita de qulquer outra forma. Por exemplo, ao invés de escolher o maior valor que a função assume em cada subintervalo, podemos escolher o menor valor possível, isto é, $\min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. A soma

$$\Delta(x_1)f(x_1) + \ldots + \Delta(x_n)f(x_n),$$

a partir dessa escolha é chamada de *soma inferior de Riemann*, e em geral, denotamos por:

$$s(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i)f(x_i) = \Delta(x_1)f(x_1) + \ldots + \Delta(x_n)f(x_n).$$

Para regiões como a exibida na Figura 1.13 pode parecer que esse método não é muito útil. No entanto, para regiões como o da Figura 1.15 o método parece ser muito mais vantajoso, uma vez que não há fórmulas específicas para calcular essa área.

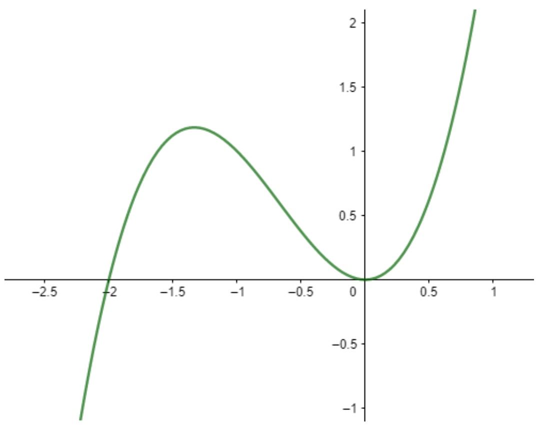
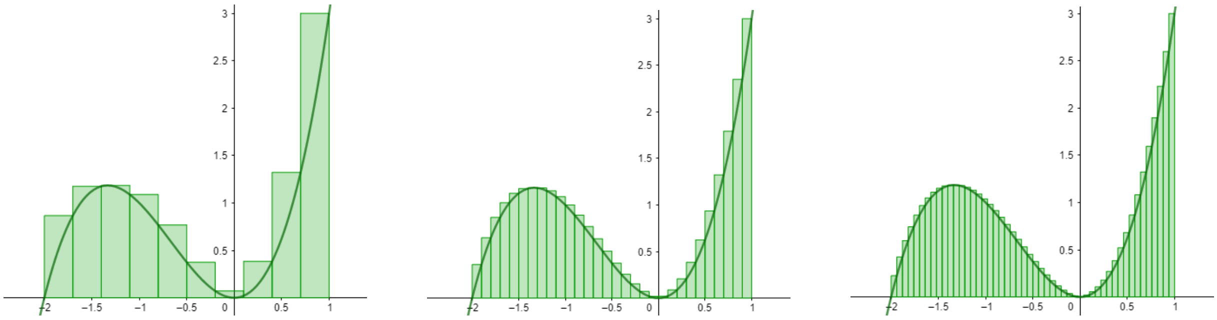


Figura 1.15: Região determinada pela função $f(x) = x^3 + 2x^2$ e o eixo da abscissa, entre os valores -2 e 1.

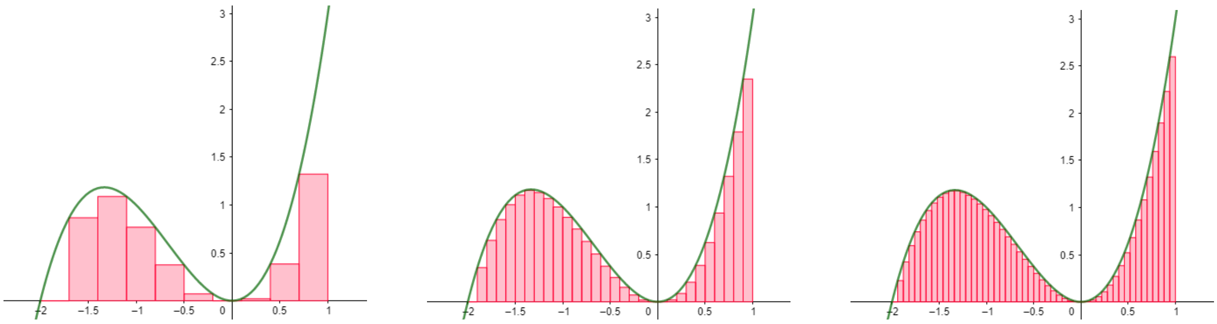
No caso da função apresentada na Figura 1.15 podemos utilizar as somas de Riemann para aproximar a área da região estudada. Na Figura 1.16 é possível visualizar essa abordagem utilizando somas superiores (Subfiguras 1.18a, 1.18b e 1.18c) e inferiores (Subfiguras 1.16d, 1.16e e 1.16f) de Riemann.



(a) $S(f;\mathcal{P}) = 3,07176$ com 11 pontos em $\mathcal{P}$

(b) $S(f;\mathcal{P}) = 2,52102$ com 31 pontos em $\mathcal{P}$

(c) $S(f;\mathcal{P}) = 2,41196$ com 51 pontos em $\mathcal{P}$



(d) $s(f;\mathcal{P}) = 1,4697$ com 11 pontos em $\mathcal{P}$

(e) $s(f;\mathcal{P}) = 1,9842$ com 31 pontos em $\mathcal{P}$

(f) $s(f;\mathcal{P}) = 2,08979$ com 51 pontos em $\mathcal{P}$

Figura 1.16: Aproximação de área da região exibida na Figura (1.15), via somas inferior e superior de Riemann para diferentes partições, cuja área é 2,25.

Perceba que a estimativa da área através da soma superior sempre resulta em um valor maior que a estimativa da área através da soma inferior. Isso sempre ocorre uma vez que

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}),$$

sendo que $f(\underline{x}) = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $f(\overline{x}) = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, em cada subintervalo, e portanto,

$$s(f;\mathcal{P}) \leq S(f;\mathcal{P}),$$

para qualquer partição $\mathcal{P}$ escolhida.

Considerando por exemplo uma partição com 401 pontos, temos que a aproximação por somas superiores resulta em 2,27015, enquanto que a soma inferior resulta em 2,22988. Em outras palavras, a soma superior "peca" pelo "excesso", enquanto que a inferior "peca" pela "falta". Mas a leitora já deve ter percebido que à medida que se aumenta o número de pontos, mais próximo se chega do valor real da área, de modo que **no limite** as somas de Riemann resultem na área da região a ser estudada. Pois bem, o limite das somas de Riemann quando o número de pontos na partição tende ao infinito é chamada de *integral de Riemann*, e é denotada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta(x_i), \tag{1.15}$$

em que a e b são as limitações no eixo da abscissa. Tais valores são chamados de *intervalo de integração* e a função $f(x)$ é chamada de *integrando*.

Para quem tiver curiosidade em saber alguns fatos históricos sobre integrais, recomendamos a leitura dos livros Ávila (1981, 1982).

Por enquanto vamos deixar a discussão sobre integrais em “modo de espera”. Vamos agora discutir o conceito de derivadas, para que em seguida possamos relacionar as duas ferramentas. Nosso objetivo é determinar a inclinação de uma função em determinado ponto x_0. Tal inclinação é medida através da inclinação da reta tangente trigonométrica do ângulo que essa reta forma como o eixo da abscissa. Sendo assim, nosso objetivo se resume a estimar essa reta tangente. Tal estimativa se dá através da inclinação de uma reta secante, que é mais simples de determinar.

Pois bem, o ponto da função a ser estudado tem coordenadas $(x_0, f(x_0))$. Escolhendo um segundo ponto da função, digamos $(x, f(x))$, traçamos a reta que passe pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ (reta essa chamada de secante), conforme Figura 1.17.

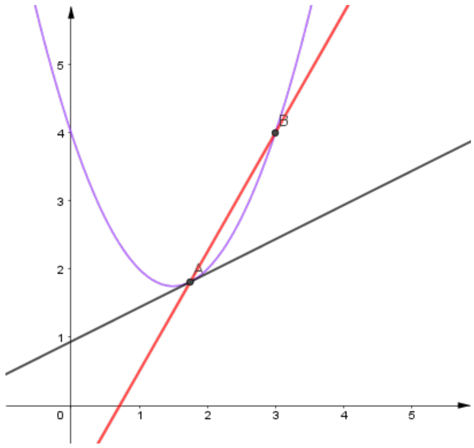
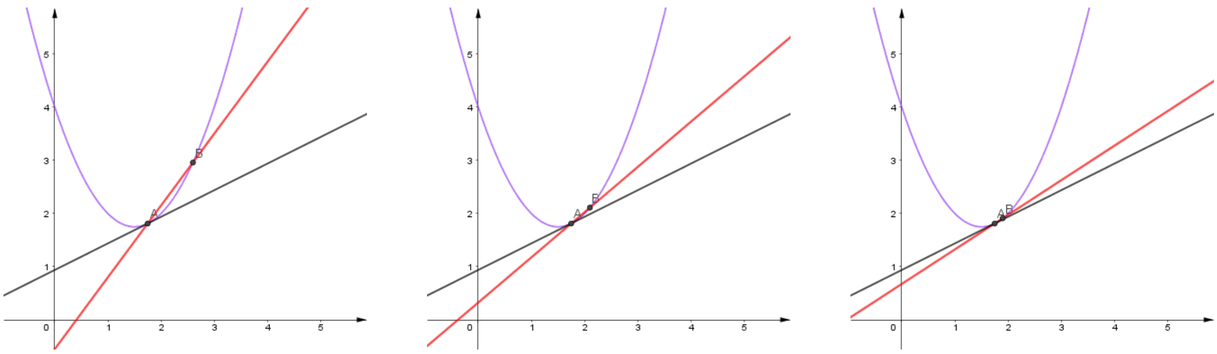


Figura 1.17: Reta secante que passa pelos pontos $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x, f(x))$, representada pela reta em vermelho. A tangente no ponto está representada pela reta em preto. E a função f está representada pela curva em roxo.

Agora, note que a inclinação da reta secante escolhida não é uma boa aproximação para a inclinação da tangente. No entanto, a medida que o ponto $B = (x, f(x))$ se aproxima do ponto $A = (x_0, f(x_0))$, temos uma aproximação cada vez melhor dessa inclinação (veja a Figura 1.18).



(a) (b) (c)

Figura 1.18: Aproximação da reta tangente através da reta secante.

Do ponto de vista algébrico, a inclinação da reta secante pode ser obtida através de relações trigonométricas (veja a Figura 1.19). Como

$$tg(\theta) = \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}},$$

então temos que a fração

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.16}$$

é uma boa aproximação para a inclinação, de modo que quando x "tende" a x_0 obtemos exatamente a inclinação da reta tangete no ponto. Em outras palavras,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{1.17}$$

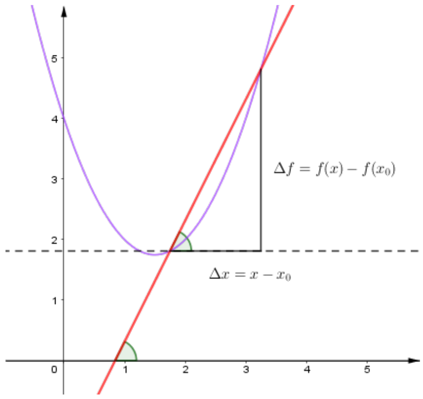


Figura 1.19: Inclinação da reta tangente por meio de aproximação da inclinação da reta secante

A inclinação da reta tangente que passa por $(x_0, f(x_0))$ se chama "derivada de f no ponto x_0" e se denota $f'(x_0)$. Perceba então que para $f'(x_0)$ estar bem definida, é necessário que o limite (1.17) exista. Isso significa que dado um ponto x_0, a inclinação da reta secante à esquerda deve "convergir" para a mesma inclinação da reta secante à direita, para que exista a derivada no ponto. Nesse caso, esses limites laterais são chamados de *derivadas laterais*.

Observação 1.2.7 *Em alguns momentos será conveniente utilizar outras notações para a derivada de uma função. As notações mais conhecidas são:*

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \dot{f}(x_0) \quad \textit{e} \quad f^{(1)}(x_0)$$

Na **Observação** 1.2.7 colocamos a notação $\frac{df}{dx}$, que também é muito utilizada principalmente para derivadas de mais de uma variável. Essa mesma notação pode ser interpretada como um quociente entre dois acréscimos. Pois bem, encaremos dx como um acréscimo em x (veja a Figura 1.19). Como vimos, $f'(x)$ é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $(x, f(x))$, olhando então para df como sendo um acréscimo na ordenada da reta tangente, associado ao acréscimo dx, teremos $f'(x) = \frac{df}{dx}$, ou ainda,

$$df = f'(x)dx. \tag{1.18}$$

Por outro lado, considerando um acréscimo dx, temos que $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x - dx)$ é o acréscimo que a função f assume, entre $x - dx$ e x. Portanto, o acréscimo Δf pode ser visto como uma aproximação de df. Podemos olhar para (1.18) como uma função que associa a cada dx um acréscimo df. Essa função é chamada de *diferencial* de f em x.

Exemplo 1.2.5 *Considere a função $f(x) = x^2 + x$. Como $f'(x) = 2x + 1$, então o diferencial df é dado por*

$df = f'(x)dx = (2x+1)dx$. *Agora, observe que*

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x) - f(x-dx) \\
&= x^2 + x - ((x-dx)^2 + (x-dx)) \\
&= x^2 + x - (x^2 - 2xdx + dx^2 + x - dx) \\
&= 2xdx + dx - dx^2 \\
&= (2x+1)dx - dx^2 \\
&= df - dx^2
\end{aligned}$$

Isso significa que $dx^2 = df - \Delta f$, e portanto, quanto menor for o valor do acréscimo dx (isto é, quando dx tender a zero), mais próximo o valor Δf será de df.

Exemplo 1.2.6 *Considere a função $f(x) = 2$. Vamos analisar a inclinação da reta tangente no ponto $x_0 = 3$. Para isso, analisemos o limite (1.17):*

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2-2}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{0}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} 0 = 0$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2-2}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{0}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 0 = 0$$

Logo as derivadas laterais existem e são iguais. Portanto, a derivada no ponto $x_0 = 3$ existe e é igual a 0.

Observe que independente do ponto x_0 escolhido, a inclinação dessa função $f(x) = 2$ é sempre zero. Esse resultado é válido para qualquer função constante, isto é, ***a derivada de uma função constante, em qualquer ponto, é zero****.*

Exemplo 1.2.7 *Considere a função $f(x) = 2x$. Vamos analisar a inclinação da reta tangente no ponto $x_0 = 1$. Para isso, analisemos o limite (1.17):*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 2 = 2$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$

Logo as derivadas laterais existem e são iguais. Portanto, a derivada no ponto $x_0 = 1$ existe e é igual a 2.

Observe que de um modo geral, escolhendo um ponto x_0 qualquer, temos:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2x-(2x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 2 = 2.$$

Logo a derivada dessa função é sempre igual a 2, independente do ponto escolhido.

Exemplo 1.2.8 *Considere a função $f(x) = x^2 + 2$. Vamos analisar a inclinação da reta tangente no ponto $x_0 = 1$. Para isso, analisemos o limite (1.17):*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2-(1^2+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2-(1^2+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2.$$

Logo as derivadas laterais existem e são iguais. Portanto, a derivada no ponto $x_0 = 1$ existe e é igual a 2.

Observe que de um modo geral, escolhendo um ponto x_0 qualquer, temos:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2+2-(x_0^2+2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} x+x_0 = 2x_0.$$

E portanto, a derivada da função depende do ponto x_0, diferentemente do caso que vimos no exemplo anterior.

Exemplo 1.2.9 *Considere a função $f(x) = |x|$. Vamos agora estudar a derivada dessa função no ponto $x_0 = 0$. Primeiro perceba que podemos definir a função módulo da seguinte forma:*

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Isso significa que à esquerda de 0, a função $f(x) = |x|$ assume o valor $-x$, enquanto que à direita de 0, a função $f(x) = |x|$ assume o valor x. Sendo assim, analisemos o limite (1.17):

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Portanto as derivadas laterais existem, mas são diferentes. Logo, a derivada no ponto $x_0 = 0$ não existe. É importante frisar que a derivada da função $f(x) = |x|$ existe em qualquer outro ponto $x_0 \neq 0$. Ainda mais, geometricamente, existe um "bico" no ponto 0. Sendo assim, para que exista a derivada é preciso que exista uma "suavidade" em torno do ponto estudado. Em outras palavras, ***não existe derivada em pontos que são "bicos"****.*

Não é de nosso interesse ficar estudando as derivadas das funções em termos de limite. Aqui será apresentado algumas regras de derivação para as *funções elementares*, bem como regras de integração. Para a leitora que tiver curiosidade de aprofundar no sentido de rigor mais "matemático", indicamos a referência Guidorizzi (2001).

Agora, voltemos a discussão sobre o que a derivada e integral tem em comum, isto é, como elas estão relacionadas? Anteriormente formulamos um problema de cálculo de área através de integral, isto é, a área determinada por uma função f em um intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\int_a^b f(x)dx$$

mas não resolvemos efetivamente esse problema. Para esse fim, necessitamos do *Teorema Fundamental do Cálculo*. O teorema afirma o seguinte, se for conhecida uma função F, de tal forma que a derivada desta função for igual ao integrando f, isto é, $F'(x) = f(x)$, então o problema acima pode ser resolvido simplesmente aplicando a função F nos extremos a e b, ou seja

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Então o problema de se resolver a integral de uma função f recai em um problema de se obter uma outra função F de tal forma que $F' = f$. Essa função F é chamada de *função primitiva* da função f.

Exemplo 1.2.10 *Sabendo que $F(x) = ln(x)$ é a função primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$, vamos calcular a área da região entre a função $f(x)$ e o eixo da abscissa, no intervalo $[1, 2]$.*

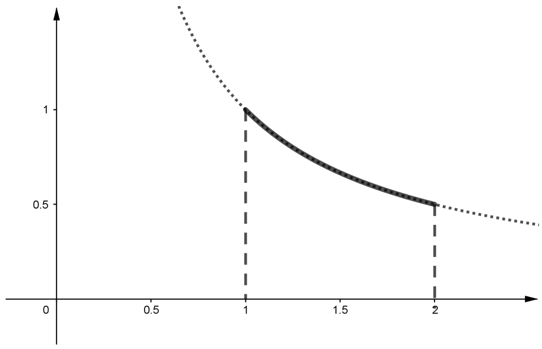


Figura 1.20: Região determinada pela função $f(x)$ e o eixo da abscissa, no intervalo $[1, 2]$.

Para isso devemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo. Assim,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = ln(x)\mid_1^2 = ln(2) - ln(1) = ln(2) \approx 0.6931$$

Nas seções a seguir vamos resolver esses problemas de um modo prático.

Exercício 1.2.8 *Classifique as afirmações abaixo entre verdadeira ou falsa. Quando verdadeira, justifique devidamente a afirmação. No caso em que a afirmação for falsa, apresente um contra-exemplo.*

1. *Toda função contínua é diferenciável.*
2. *Toda função diferenciável é também contínua.*
3. *Toda função constante não admite inclinação, e portanto, possui derivada igual a 0 em todos os seus pontos.*
4. *Se uma função é descontínua em um ponto p, então esta função pode admitir derivada no ponto p.*
5. *O coeficiente angular de uma função afim é exatamente igual a derivada da função em qualquer ponto.*

Exercício 1.2.9 *Na Física, a* velocidade média *de uma partícula entre os instantes t e t_0 é definida pela variação*

$$v_{med} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

em que a função f representa o movimento da partícula.

Por outro lado, a velocidade instantânea *é definida como sendo*

$$v_{inst} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

A partir disso, considere uma partícula cujo movimento é descrito pela função $f(t) = t^2$. Selecione todas as afirmações abaixo que sejam verdadeiras.

1. *No intervalo de tempo $[1, 2]$ a velocidade média é dada por $3\ m/s$.*
2. *A velocidade instantânea em $t = 1$ é menor que a velocidade média no intervalo $[1, 2]$.*

3. *A velocidade instantânea em $t = 2$ é menor que a velocidade média no intervalo $[1, 2]$.*

4. *A velocidade instantânea em $t = 0$ é 0 m/s*

5. *A velocidade instantânea dessa partícula cresce à medida que $t > 0$ cresce.*

Exercício 1.2.10 *Acompanhe o seguinte raciocínio:*

Seja $F(x) = 2x+1$. Calculando a derivada dessa função em um determinando ponto x_0, obtemos:

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2x + 1 - (2x_0 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2 = 2 = f(x)$$

Considere agora $F(x) = 2x + 2$. Calculando a derivada dessa função em um determinando ponto x_0, obtemos:

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2x + 2 - (2x_0 + 2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2 = 2 = f(x)$$

Baseando-se nesse raciocínio, selecione as afirmações verdadeiras

1. *A primitiva de uma função não é única*

2. *A função $F(x) = 2x + 3$ também é uma primitiva para a função $f(x) = 2$*

3. *A função $F(x) = 3x + 2$ também é uma primitiva para a função $f(x) = 2$*

4. *O valor $f(x)$ pode ser visto como a velocidade instantânea de uma partícula, para cada x, cujo movimento é dado pela função F.*

5. *Funções constantes possuem como primitivas funções afim*

Exercício 1.2.11 *Sabendo que $F(x) = sen(x)$ é uma função primitiva de $f(x) = cos(x)$, calcule a área da região entre a função $f(x)$ e o eixo da abscissa, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Exercício 1.2.12 *Pense e apresente um exemplo de função cujo domínio é dado pelo conjunto dos números reais, que não seja diferenciável em todo o seu domínio. Argumente o fato da função escolhida não ter derivada em nenhum ponto.*

Exercício 1.2.13 *Considere a seguinte função $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$F(y) = \int_a^y f(x)dx$$

A função F associa para cada valor de y, a área da região delimitada pela função f no intervalo $[a, y]$. Justifique o fato de que se $f(x) \geq 0$, então a função F é crescente.

1.3 Regras de derivação e integração

Primeiro vamos apresentar uma lista de derivadas de algumas funções, e que a partir destas, poderemos deduzir várias outras. Faremos o mesmo para integrais de funções. Em ambas as abordagens, apresentaremos também algumas técnicas de derivação e integração para que a leitora adquira destreza operacional.

1.3.1 Regras de derivada

As derivadas das funções abaixo foram deduzidas a partir do limite de derivada. Para maiores detalhes, consulte Guidorizzi (2001); Ávila (1981).

1. A derivada de uma função constante $f(x) = a$ é dada por

$$f'(x) = 0$$

2. A derivada de uma função polinomial $f(x) = x^n$ é dada por (*Regra do tombo*)

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

É importante observar que essa regra é válida para qualquer $n \in \mathbb{Q}$.

3. A derivada da função seno $f(x) = sen(x)$ é dada por

$$f'(x) = cos(x)$$

4. A derivada da função cosseno $f(x) = cos(x)$ é dada por

$$f'(x) = -sen(x)$$

5. A derivada da função exponencial (na base *e*) $f(x) = e^x$ é dada por

$$f'(x) = e^x$$

6. A derivada da função logaritmica (na base *e*) $f(x) = ln(x)$ é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Além das derivadas acima, são válidas as seguintes porpriedade:

1. A derivada da soma é igual a soma das derivadas

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2. A derivada de uma constante multiplicada por uma função é igual a constante multiplicada pela derivada da função

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

A partir dessas duas regras, podemos deduzir também que a derivada da subtração é a subtração das derivadas, isto é, $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$, já que

$$(f - g)'(x) = (f + (-g))'(x) = f'(x) + (-g)'(x) = f'(x) + (-(g'(x))) = f'(x) - g'(x)$$

Exemplo 1.3.1 *A derivada da função $f(x) = x^2 + x$ é dada por*

$$f'(x) = (x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$$

Veja que neste exemplo não estamos calculando a derivada em um ponto específico, e sim estamos pensando na derivada como uma função. Ou seja, f' pode ser vista como uma aplicação que leva um valor x na derivada da função $f(x)$, em outras palavras, $x \mapsto f'(x)$. Assim, a derivada leva a função $f(x)$ em uma outra função $f'(x)$ (veja a Figura 1.21).

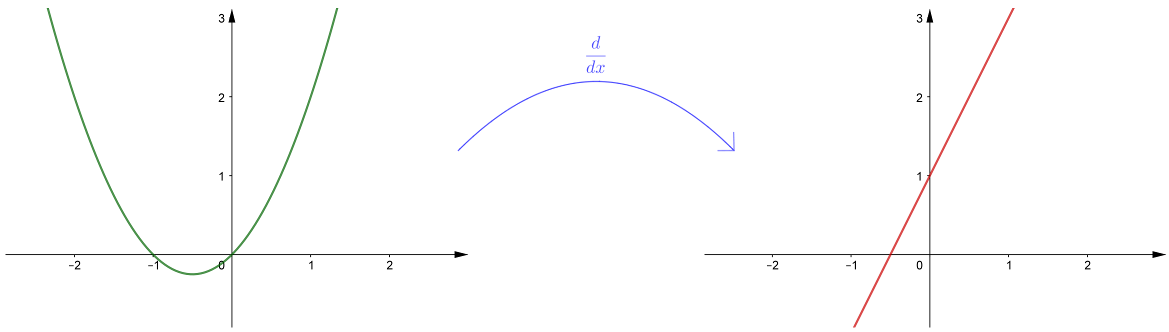


Figura 1.21: Derivada como uma aplicação que leva a função $f(x) = x^2 + x$ (em verde) na função $f'(x) = 2x + 1$ (em vermelho)

Exemplo 1.3.2 *A derivada da função $f(x) = 2ln(x)$ é dada por*

$$f'(x) = (2ln(x))' = 2(ln(x))' = 2\frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Exemplo 1.3.3 *A derivada da função $f(x) = sen(x) + e^x - 5$ é dada por*

$$f'(x) = (sen(x) + e^x - 5)' = (sen(x))' + (e^x)' - (5)' = cos(x) + e^x - 0 = cos(x) + e^x$$

É importante ressaltar que **não são válidas** as propriedades: a derivada do produto é o produto das derivadas e a derivada da divisão é a divisão das derivadas. Para esses casos, temos regras específicas. Vejamos como calcular esses casos.

1. *Regra do produto:* A derivada do produto entre duas funções é dada por

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

2. *Regra do quociente:* A derivada da divisão entre duas funções é dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Exemplo 1.3.4 *Considere a função $f(x) = x^2cos(x)$. Então a derivada dessa função é dada por*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'cos(x) + x^2(cos(x))' \\ &= 2xcos(x) - x^2sen(x) \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.5 *Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Então a derivada dessa função é dada por*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} \\ &= \frac{0.x - 1.1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Por fim, vamos tratar mais um importante caso de derivada, que é a derivada de composição de funções.

1. *Regra da cadeia* A derivada da composição entre duas funções é dada por:

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x)).g'(x)$$

Exemplo 1.3.6 *Vamos calcular a derivada da função $h(x) = sen(3x)$. Primeiro note que as funções que estão sendo compostas são $g(x) = 3x$ e $f(x) = sen(x)$, isto é, $h(x) = f(g(x))$. Como $f'(x) = cos(x)$ e $g'(x) = 3$, obtemos*

$$h'(x) = 3cos(3x)$$

É importante oberservar que a regra da cadeia estabelece que após derivar a função f é preciso aplicar a derivada na função $g(x)$, obtendo $f'(g(x))$.

Exercício 1.3.1 *Calcule a derivada das seguintes funções e informe quais regras utilizou para obter a derivada:*

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$
2. $f(x) = 2cos(x)$
3. $f(x) = sen(x)cos(x)$
4. $f(x) = e^x + ln(x)$
5. $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f(x) = \frac{1}{x}$

Exercício 1.3.2 *É possível mostrar que uma função f é crescente em determinado ponto x_0 , se a derivada da função f, aplicada em x_0 , é maior que 0. Por outro lado, se a derivada for menor que 0, então a função é decrescente em x_0. Por fim, se a derivada for igual a 0, então a função não é crescente e nem decrescente. Sabendo disso, selecione abaixo apenas as opções que retratam o verdadeiro comportamento da função.*

1. *A função $f(x) = 2x + 1$ é crescente em todo o seu domínio*
2. *A função $f(x) = x^2 + x$ é crescente no intervalo $(-0.5, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, -0.5)$*
3. *A função $f(x) = x^3 + 1$ é crescente em todo o seu domínio*
4. *A função $f(x) = 2$ é sempre crescente*
5. *Se existe x_0 tal que $f'(x_0) = 0$, então f é uma função constante.*

Exercício 1.3.3 *Utilizando as ferramentas do exercícios anterior, faça um desenho de uma função f que tem as seguintes características:*

1. $f'(x) > 0$, *para todo x no intervalo $(-\infty, 0)$ e também no intervalo $(1, \infty)$*
2. $f'(x) < 0$, *para todo x no intervalo $(0, 1)$*
3. $f(0) = 1$ *e* $f(1) = -1$
4. $f'(0) = f'(1) = 0$

Exercício 1.3.4 *Utilizando propriedades de derivada ou integral, justifique o fato de que dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ de tal forma que*

$$f'(x) = g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

então pode-se concluir que $f(x) = g(x) + c$, sendo c uma constante.

Exercício 1.3.5 *Considere a seguinte função*

$$h(x) = e^{-x^2}$$

a) Identifique quais são as funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $h(x) = g(f(x))$.

b) Calcule a derivada da função h

Exercício 1.3.6 *Calcule a derivada das seguintes funções:*

1. $f(x) = e^{-3x}$
2. $f(x) = cos^2(x)$
3. $f(x) = ln(2x + 1)$
4. $f(x) = tg(2x)$

Exercício 1.3.7 *As* funções hiperbólicas *são definidas de um modo similar que as funções trigonométricas. No caso das funções trigonométricas, os ângulos estão associados a uma circunferência. Por outro lado, os ângulos das funções hiperbólicas estão associados a hipérboles. As funções hiperbólicas têm grande utilidade em movimentos vibratórios. Esse tipo de função também é utilizada para estudar problema envolvendo curvas catenárias.*

Dois exemplos de funções hiperbólicas são a função seno hiperbólico, *denotada por $senh(x)$, e a função* cosseno hiperbólico, *denotada por $cosh(x)$. Tais funções, diferentemente do caso das trigonométricas, não são periódicas e nem limitadas. Pode-se ainda escrever tais funções como:*

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Sabendo disso, responda:

1. *Calcule a derivada das funções $senh(x)$ e $cosh(x)$*
2. *Mostre que $e^x = senh(x) + cosh(x)$*
3. *Verifique que a função $cosh(x)$ é par e a função $senh(x)$ é ímpar, sendo que uma* função par *é uma função f que satisfaz $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in D(f)$, enquanto que uma* função ímpar *é uma função que satisfaz $-f(x) = f(-x)$, para todo $x \in D(f)$.*

1.3.2 Regras de integrais

Assim como fizemos na Subseção 1.3.1, vamos apresentar uma lista de integrais de algumas funções, e com essa lista será possível deduzir a integral de outras funções “mais elaboradas”. Em seguida vamos apresentar algumas propriedades de integrais, a fim de facilitar a resolução das mesmas.

A integrais estudadas na Subseção 1.2.2 foram calculadas a partir do conceito de funções primitivas, isto é, a integral de uma função f é dada por uma função F de tal modo que $F' = f$. Nesse contexto, o conceito de integral foi utilizado para calcular a área de uma certa região delimitada em um intervalo $[a, b]$.

No **Exercício 1.2.13** foi proposto o seguinte raciocínio, fixando o extremo esquerdo do intervalo e variando o extremo direito podemos definir uma função a partir de uma integral, a saber $F(y) = \int_a^y f(x)dx$. Essas integrais que possuem um intervalos de integração definidos são chamadas de *integrais definidas*. Surge então a seguinte pergunta, é possível trabalhar com integrais sem ter fixado intervalos de integração?

Resolver uma integral $\int f(x)dx$, sem um intervalo pré-determinado, recai sobre um problema de simplesmente determinar todas as primitivas da função f, isto é, enquanto a solução do problema $\int_a^b f(x)dx$ é obtida simplesmente calculando uma primitiva de f aplicada nos extremos do intervalo $[a, b]$, o problema $\int f(x)dx$ consiste em obter todas as funções primitivas da função f.

Veja que a primitiva de uma função f não é única. Para verificar esse fato, perceba o seguinte. Suponha que F_1 seja uma primitiva da função f, isto é, $F_1' = f$. Assim, considere uma constante qualquer c_1. Logo a função $F_2(x) = F_1(x) + c_1$ também é uma primitiva de f, uma vez que $F_2'(x) = F_1'(x) + c_1' = f(x) + 0 = f(x)$. Como esse raciocínio pode ser aplicado para qualquer constante c, então segue que existem infinitas primitivas para uma função f. Sendo assim, a solução do problema $\int f(x)dx$ é dada por

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \tag{1.19}$$

em que $F'(x) = f(x)$ e c representa uma constante qualquer, chamada de *constante de integração*.

A integral dada em (1.19) é chamada de *integral indefinida*. Note que integrais definidas produzem números como resposta, enquanto que integrais indefinidas produzem funções como resposta.

Observação 1.3.1 *É interessante notar que a constante de integração também aparece (implicitamente) nas integrais definidas. De fato, se F é uma primitiva de f (e portanto $F + c$ também é), então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + c\,|_a^b = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Perceba que independentemente das funções F e f, as constantes de integração se anulam para integrais definidas. Por esse motivo, não há necessidade de incorporá-las na resolução de integrais definidas.

A seguir vamos apresentar algumas integrais, que são obtidas a partir do conhecimento de suas primitivas. As regras abaixo são válidas tanto para integrais definidas quanto para integrais indefinidas.

1. A integral de uma função constante $f(x) = a$ é dada por

$$\int adx = ax + c,$$

   em que c é a constante de integração.

2. A integral de uma função polinomial $f(x) = x^n$ é dada por

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

em que c é a constante de integração. É importante observar que essa regra é válida para qualquer $n \in \mathbb{Q}$.

3. A integral da função seno $f(x) = sen(x)$ é dada por

$$\int sen(x)dx = -cos(x) + c,$$

em que c é a constante de integração.

4. A integral da função cosseno $f(x) = cos(x)$ é dada por

$$\int cos(x)dx = sen(x) + c,$$

em que c é a constante de integração.

5. A integral da função exponencial $f(x) = e^x$ é dada por

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

em que c é a constante de integração.

6. A integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é dada por

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(x) + c,$$

em que c é a constante de integração.

Para verificar que de fato as integrais estão corretas, a leitora pode derivar as funções à direita da equação e constatar que a função obtida dessa derivada será o integrando. Além das integrais acima, são válidas as seguintes porpriedades:

1. A integral da soma é igual a soma das integrais

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2. A integral de uma constante multiplicada por uma função é igual a constante multiplicada pela integral da função

$$\int (\lambda f)(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

3. A integral da diferença é igual a diferença das integrais

$$\int (f-g)(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

Exemplo 1.3.7 *Vamos calcular a integral da função $h(x) = x^2 + cos(x)$. Para isso, perceba que a função*

$h(x)$ pode ser escrita como $h(x) = f(x) + g(x)$, sendo $f(x)x^2$ e $g(x) = cos(x)$. Portanto,

$$\int h(x)dx = \int x^2 + cos(x)dx = \int x^2dx + \int cos(x)dx = \frac{x^3}{3} + c_1 + sen(x) + c_2 = \frac{x^3}{3} + sen(x) + c,$$

em que $c = c_1 + c_2$.

No exemplo acima "juntamos" as constantes obtidas de cada integral em uma só. A fim de facilitar a notação e a compreensão do conteúdo, colocaremos direto a constante c ao final da resolução do problema, e não há problemas em fazer isso, uma vez que a soma de constantes continuará sendo uma constante. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 1.3.8 *Vamos calcular a integral da função $h(x) = 1 - e^x$. Aplicando as regras de integrais, temos que:*

$$\int 1 - e^x dx = \int 1dx + \int e^x dx = x - e^x + c.$$

Veja então que, para cada valor $c \in \mathbb{R}$, obtemos uma solução para o problema $\int 1 - e^x dx$ (veja Figura 1.22). Com isso, concluímos que um problema de integral indefinida admite infinitas soluções, caso exista uma primitiva para o integrando.

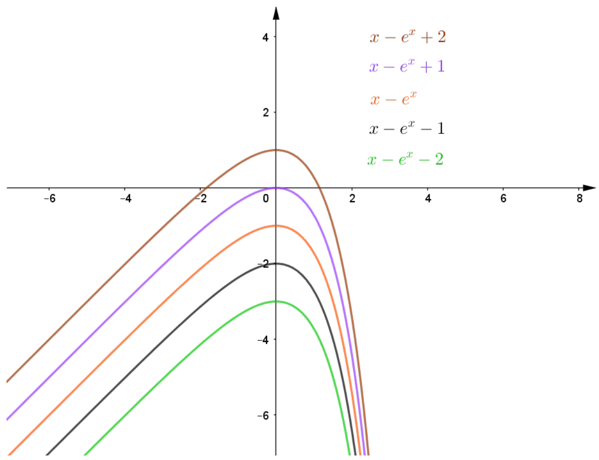


Figura 1.22: Funções $F(x) = x - e^x + c$ que são obtidas a partir do problema $\int 1 - e^x dx$. As soluções em verde, preto, laranja, roxo e marrom representam a função F com constante de integração igual a $-2, -1, 0, 1$ e 2, respectivamente.

Exemplo 1.3.9 *Vamos calcular a integral da função $h(x) = \frac{2}{x}$. Aplicando as regras de integrais, temos que:*

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2(ln(x) + c_1) = 2ln(x) + c,$$

em que $c = 2c_1$.

Novamente substituímos a constante $2c_1$ pela constante c, apenas para facilitar a notação. De um modo prático, poderíamos colocar diretamente $2ln(x) + c$ como resposta para o problema $\int \frac{2}{x}dx$. A Figura 1.23 ilustra a solução do problema $\int \frac{2}{x}dx$ para alguns valores de c.

Como vimos anteriormente, a derivada do produto (quociente) de duas funções não é o produto (quociente) entre as derivadas de cada função. Vimos também que a derivada da composição entre duas funções não é a composição entre as derivadas das funções. O mesmo ocorre para as integrais. No entanto, vamos ver alternativas para lidar com problemas desse tipo.

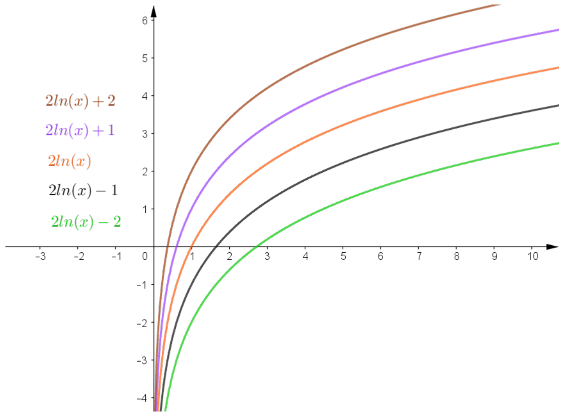


Figura 1.23: Funções $F(x) = 2ln(x) + c$ que são obtidas a partir do problema $\int \frac{2}{x}dx$. As soluções em verde, preto, laranja, roxo e marrom representam a função F com constante de integração igual a $-2, -1, 0, 1$ e 2, respectivamente.

Sabemos que a integral da função e^x é a própria função e^x somada a uma constante. No entanto, a integral da função e^{2x} não é igual a própria função e^{2x} somada a uma constante, ou seja, $\int e^{2x}dx \neq e^{2x} + c$. Para verificar isso, veja que ao derivar $e^{2x}+c$, obtemos $2e^{2x}$ que é diferente da função integrando. O problema nesse caso é que estamos tratando de uma composição entre duas funções, isto é, a função $h(x) = e^{2x}$ pode ser escrita como $h(x) = f(g(x))$, sendo que $g(x) = 2x$ e $f(x) = e^x$. Vejamos então como tratar esse caso.

Considere duas funções F e g, sendo que a função F é uma primitiva da função f, isto é, $F' = f$. Assim, pela regra da cadeia, temos que:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Equivalentemente, obtemos

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c. \tag{1.20}$$

Em geral, os problemas não aparecem como em (1.20), ou se aparecem, é difícil identificá-lo nessa forma (veja por exemplo o problema que foi proposto $\int e^{2x}dx$). Sendo assim, considerando a seguinte mudança de variável $u = g(x)$, a equação (1.20) fica

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c = F(u) + c = \int f(u)du, \tag{1.21}$$

em que $du = u'(x)dx$ é o diferencial da função $u = g(x)$.

Perceba que através da mudança de variável $u = g(x)$, chegamos em uma forma mais "amigável" para trabalhar. Essa técnica é chamada de *integral por mudança de variável*, ou também, *integral por substituição*.

Vamos então colocar em prática essa técnica, a fim de resolver o problema proposto.

Exemplo 1.3.10 *Vamos resolver a integral $\int e^{2x}dx$ utilizando mudança de variáveis. Como $e^{2x} = f(g(x))$, sendo que $g(x) = 2x$ e $f(x) = e^x$, então chamando $u = 2x$, temos que o diferencial vale $du = u'(x)dx = 2dx$, ou equivalentemente, $dx = \frac{du}{2}$. Portanto, temos que:*

$$\int e^{2x}dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + c.$$

Retornando a variável x, concluímos que $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$.

Essa mesma abordagem pode ser aplicada para problemas de integrais definidas. Nesse caso, é preciso também efetuar uma mudança de variável nos intervalos de integração. Perceba que ao fazer $u = g(x)$, em que $x \in [a, b]$, então o novo intervalo de integração será $[g(a), g(b)]$, e portanto, o problema (1.21) fica

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du, \tag{1.22}$$

Exemplo 1.3.11 *Vamos resolver a integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(4x)dx$ utilizando mudança de variáveis. Chamando $u = 4x$, temos que $du = 4dx$. Ainda, quando $x = 0$, temos que $u = 4.0 = 0$. Por outro lado, quando $x = \frac{\pi}{2}$, temos que $u = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$. Portanto,*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(4x)dx &= \int_0^{2\pi} \frac{sen(u)}{4}du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} sen(u)du \\
&= \frac{1}{4}\left(-cos(u)\ |_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{4}(-1-(-1)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercício 1.3.8 *Calcule as seguintes integrais por meio de mudança de variáveis*

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x}{1+x^2}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)cos(x)dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}dx$
4. $\displaystyle\int xsen(x^2+1)dx$

Exercício 1.3.9 *Uma função é chamada de* periódica*, com período p, se satisfaz $f(x+p) = f(x)$.*

1. *Utilize a mudança de variável para mostrar que*

$$\int_0^a f(x)dx = \int_p^{p+a} f(x)dx$$

   em que f é uma função periódica de período p.

2. *Interprete geometricamente o resultado do item anterior.*

Exercício 1.3.10 *A função* tangente hiperbólica*, denotada por $tgh(x)$, é dada da seguinte forma*

$$tgh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)},$$

sendo $senh(x)$ e $cosh(x)$ as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, respectivamente. Através de mudança de variáveis, calcule

$$\int tgh(x)dx$$

Agora já sabemos um caminho para tentar integrar funções compostas, ou até mesmo produto entre funções (veja item 2. do **Exercício 1.3.8**). Mas em geral, a técninca de substituição não resolver a integral do produto de duas funções. Por exemplo, mudança de variáveis não é um bom caminho para resolver $\int xe^x dx$.

Uma segunda técnica de integração que vamos abordar aqui é o método chamado de *integração por partes*. Essa técnica está relacionada diretamente com a regra da derivada do produto. Vejamos, a regra da derivada do produto diz que

$$(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando dos dois lados da equação, obtemos:

$$\int (f.g)'(x)dx = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx,$$

e assim, chegamos em

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx,$$

ou ainda,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{1.23}$$

Observação 1.3.2 *A rigor, deveria aparecer uma constante de integração ao calcular $\int (f.g)'(x)dx$, isto é, $\int (f.g)'(x)dx = f(x)g(x) + c$. No entanto, o método exige o cálculo de mais uma integral indefinida (a saber $\int f'(x)g(x)dx$). Logo, em geral, se opta por colocar a constante de integração ao final do cálculo.*

A expressão (1.23) é chamada de integral por partes. Esse método transfere o problema original em um outro que é equivalente. Em um primeiro momento, parece que a expressão (1.23) não nos traz nenhuma vantagem. Retomemos ao problema mencionado acima para ilustrar as vantagens dessa técnica.

Exemplo 1.3.12 *Vamos calcular $\int xe^x dx$. Primeiro é preciso identificar quem faz o papel da função $f(x)$ e quem faz o papel da função $g'(x)$, descritas em (1.23). Chamando $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, temos que $f'(x) = 1$ e $g(x) = e^x$. A partir disso, podemos utilizar a expressão (1.23), isto é,*

$$\begin{aligned}
\int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\
\int xe^x dx &= xe^x - \int 1.e^x dx \\
&= xe^x - e^x + c \\
&= e^x(x-1) + c
\end{aligned}$$

Veja que ao utilizar a técnica de integração por partes, podemos encontrar um problema equivalente, sendo muito mais simples de se resolver.

Observação 1.3.3 *Note que se tivéssemos chamado $g'(x) = x$ e $f(x) = e^x$ no exemplo acima, cairíamos em um problema "pior" do que antes, já que $\int f'(x)g(x)dx = \int \frac{x^2}{2}e^x dx$.*

A técnica de integração por partes também pode ser utilizada para integrais definidas. Nesse caso, temos uma pequena mudança. O termo $f(x)g(x)$ que aparece no método, deve ser também aplicado aos limites de integração, já que $f(x)g(x)$ foi obtido através do problema $\int (f.g)'(x)dx$.

Exemplo 1.3.13 *Vamos calcular $\int_0^\pi xcos(x)dx$. Chamando $f(x) = x$ e $g'(x) = cos(x)$, temos que $f'(x) = 1$*

e $g(x) = sen(x)$. Pelo método de integral por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xcos(x)dx &= xsen(x) \mid_0^{\pi} - \int_0^{\pi} sen(x)dx \\
&= (\pi sen(\pi) - 0sen(0)) - (-cos(x) \mid_0^{\pi}) \\
&= 0 - (-cos(\pi) - (-cos(0))) \\
&= -(1 - (-1)) \\
&= -2
\end{aligned}$$

Exercício 1.3.11 *Utilize o método de integração por partes para calcular as seguintes integrais definidas:*

1. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} xcos(x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 xsen(x)dx$

Exercício 1.3.12 *Utilize o método de integração por partes para calcular as seguintes integrais indefinidas:*

1. $\displaystyle\int ln(x)dx$
2. $\displaystyle\int e^x cos(x)dx$

Exercício 1.3.13 *A partir das identidades trigonométricas*

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1 \quad \text{e} \quad cos^2(x) - sen^2(x) = cos(2x)$$

Calcule as integrais abaixo por meio do método de integração por partes

1. $\displaystyle\int cos^2(x)dx$
2. $\displaystyle\int sen^2(x)dx$

Capítulo 2

Funções de duas ou mais variáveis

No capítulo anterior estudamos funções de apenas uma variável e como obter as derivadas e integrais de tais funções. Neste capítulo vamos estender essas ferramentas para funções de mais de uma variável.

2.1 Funções de duas variáveis

Sabemos que a área de um retângulo é calculada multiplicando-se o tamanho da base pela altura deste retângulo. Isto é, um retângulo de base 3 cm e altura 2 cm tem uma área igual a $2.3 = 6\ cm^2$. Para retângulos de difenretes bases e diferentes alturas, obtemos áreas diferentes. Portanto, podemos ver os valores da base e altura de um retângulo como variáveis, e sua área como o valor associado a essas duas variáveis. Assim, podemos escrever uma função matemática que descreve essa processo da seguinte forma:

$$f(x,y) = xy,$$

em que x e y representam os valores da base e altura, respectivamente. Nesse caso, o valor da função $f(x,y)$ representa o valor da área desejada.

Para representar graficamente esse tipo de função necessitamos de mais uma dimensão, isto é, representamos o gráfico desse tipo de função em um espaço tri-dimensional, em que o domínio é formado pelo conjunto $\mathbb{R}^2$ e a imagem por $\mathbb{R}$.

$$rot\vec{F} = det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$$

Referências

Guidorizzi, H.L., 2001. *Um curso de cálculo*, vol. 1. LTC.

Ávila, G., 1981. *Cálculo 1: Funções de uma variável*, vol. 1. LTC.

Ávila, G., 1982. *Cálculo 2: Funções de uma variável*, vol. 2. LTC.

Índice Remissivo