Ilum Escola de Ciência

Notas de Matemática: Equações Diferenciais

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques

15 de dezembro de 2022, Campinas

Sumário

Introdução

Este texto traz um breve resumo do conteúdo de **Equações Diferenciais**, estudado pela turma 22 da Ilum Escola de Ciência. Esses tópicos abordam problemas e conceitos na área de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais.

A ideia deste material é propor um estudo destes conceitos baseando-se em problemas de modelagem, cujos tópicos dessa área são baseados no interesse da turma e do professor. Inicialmente esse material servirá como guia e também como um resumo do conteúdo já visto pelos alunos. Os exemplos e exercícios propostos aqui são em sua maioria os mesmos discutidos em sala de aula.

O texto ficará disponível na plataforma Moodle, na aba Material da disciplina **Equações Diferenciais**. Este material será atualizado à medida que o curso for avançando.

Bibliografia: Boyce and DiPrima (2009); Zill and Cullen (2000); Bassanezi and Ferreira (1988).

Capítulo 1

Intodução às Equações Diferenciais

1.1 Motivação

Muitos dos princípios regras ou leis que são baseados em fenômenos da natureza são definidas por meio de declarações ou afirmações envolvendo taxas e relações. Em termos matemáticos, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são chamadas de *equações diferenciais*. Portanto, para entender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente em circuitos elétricos, ou o aumento ou diminuição das populações, entre muitos outros, é necessário saber algo sobre equações diferenciais.

Por exemplo, a segunda lei de Newton, que afirma que a força resultante sobre um objeto é determinada pela sua massa vezes a aceleração, é expressa pela equação

$$F = ma \tag{1.1}$$

em que m é a massa do objeto, a é sua aceleração e F é a força resultante exercida sobre o objeto.

Sabemos que a aceleração é definida como a velocidade instantânea, isto é, $a = \frac{dv}{dt}$, então podemos reescrever a Equação (1.1) por

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{1.2}$$

Por outro lado, considere as forças que atuam sobre o objeto quando ele está em queda. A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, isto é, a força é dada por mg, sendo g a aceleração da gravidade. Há também uma outra força devido à resistência do ar. Vamos considerar que essa força é proporcional à velocidade. Assim, a força da resistência é dada por γv, em que γ é uma constante.

Ao escrever uma expressão para a força resultante F, obtemos que

$$F = mg - \gamma v \tag{1.3}$$

e portanto, da Equação (1.2) chegamos que

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v, \tag{1.4}$$

ou ainda,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v. \tag{1.5}$$

Neste problema temos três constantes (também chamadas de parâmetros) m, g e γ e uma variável v. Aqui estamos simplificando a notação de v, que na verdade deveria estar escrita como $v(t)$, já que está representando uma função que depende do tempo.

A Equação (1.5) relaciona uma função v com sua derivada. Essa equação é um exemplo de Equação Diferencial. Como a função v depende de uma única variável (tempo t), então a equação (1.5) é chamada de *Equação Diferencial Ordinária* (EDO).

Caso a equação relacione uma função de duas ou mais variáveis então a equação diferencial é chamada de *Equação Diferencial Parcial* (EDP). Um exemplo de uma EDP é a equação do calor que é dada por

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{1.6}$$

sendo α^2 o coeficiente de difusão térmica do material.

Para resolver uma equação diferencial, como a dada em (1.5), precisamos encontrar uma função $v = v(t)$ que satisfaça a equação. Para isso existem diversas técnicas das quais veremos apenas as mais utilizadas. Veremos também algumas técnicas para aproximar as soluções analíticas por meio de soluções numéricas que aproximam as soluções desejadas.

Primeiro focaremos nas EDOs, e ao final, nos dedicaremos ao estudo de algumas EDPs. Em questão de notação, é comum encontrar na literatura as seguintes simbologias para representar uma EDO:

$$\frac{dv}{dt} = f(t,v) \quad \text{ou} \quad v' = f(t,v). \tag{1.7}$$

Em qualquer um dos casos, a função $f(t,v)$ é chamada de campo ou função taxa. No nosso exemplo fornecido em (1.5), a função f é dada por $f(t,v) = g - \frac{\gamma}{m}v$.

1.2 Campo de Direções

Vamos retornar ao exemplo mencionado na seção anterior, isto é, considere o exemplo de um objeto em queda cuja equação diferencial é dada por $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v$. Para facilitar nossa análise, considere que $g = 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $m = 10$ kg e $\gamma = 2\frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Ou seja, a equação diferencial (1.5) fica:

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}. \tag{1.8}$$

Imagine agora que ainda não saibamos resolver esse tipo de problema, mas queremos ter uma ideia de como as soluções se comportam. Para isso, podemos fazer uma análise geométrica da EDO em questão.

Suponha que a velocidade v tenha um certo valor dado. Assim, avaliando o lado direito da Equação (1.8), podemos encontrar o valor correspondente da taxa $\frac{dv}{dt}$. Por exemplo, se $v = 40$, então $\frac{dv}{dt} = 1,8$. Isso significa que a inclinação de uma solução $v(t)$ tem o valor $1,8$ em qualquer ponto onde $v = 40$. Podemos representar graficamente essa ideia no plano tempo $\times$ velocidade desenhando segmentos de linha curtos com inclinação $1,8$ em vários pontos na linha $v = 40$ (veja a Figura 1.1).

Da mesma forma, se $v = 50$, então $\frac{dv}{dt} = -0,2$. Veja na Figura 1.1 que em todos os pontos nos quais $v = 50$ estão desenhados pequenos segmentos de linha com inclinação $-0,2$. A Figura 1.1 é um exemplo do que chamamos de *campo de direções*.

Um dos fatos importantes sobre o campo de direções, ilustrado na Figura 1.1, é que cada segmento

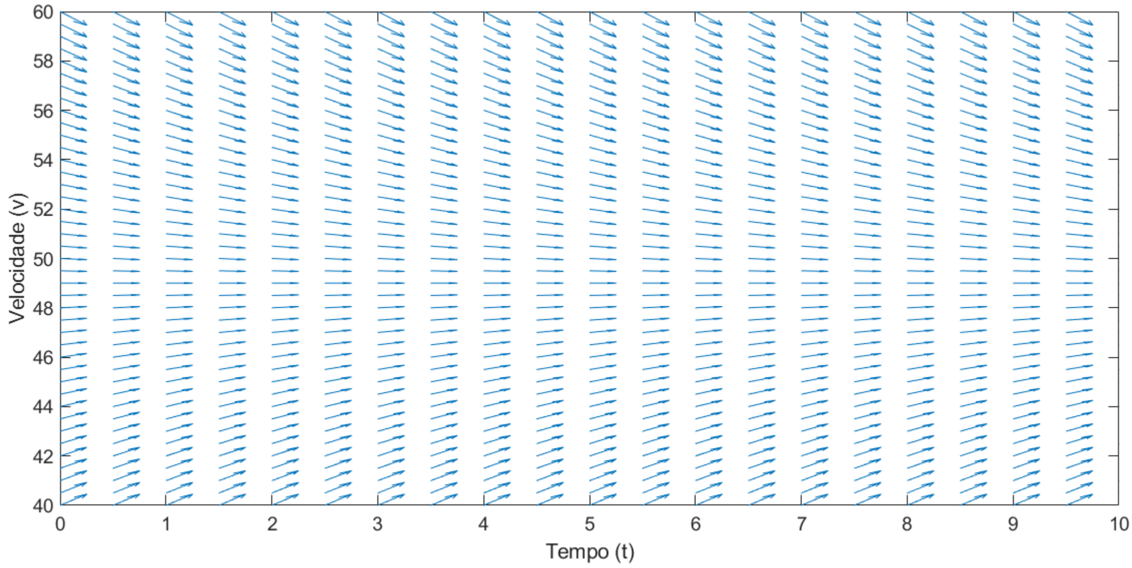

Figura 1.1: Campo de direções da equação diferencial (1.8)

de linha é a tangente de uma das curvas de soluções do problema original (lembre-se que uma solução da Equação (1.8) é uma função $v = v(t)$ cujo gráfico é uma curva no plano tempo $\times$ velocidade).

Assim, embora não tenhamos encontrado nenhuma solução, podemos tirar algumas conclusões qualitativas sobre o comportamento das soluções. Por exemplo, se v for menor que um certo valor crítico, então toda a linha de segmentos têm inclinações positivas, e a velocidade do objeto em queda aumenta à medida que cai. Por outro lado, se v for maior que o valor crítico, então os segmentos de linha têm inclinações negativas, e a velocidade do objeto em queda diminui à medida que cai.

Agora, qual é esse valor crítico de v que separa os objetos cuja velocidade está aumentando daqueles cuja velocidade está diminuindo? Voltando a Equação (1.8), perguntamos qual valor de v fará com que $\frac{dv}{dt}$ seja zero, isto é,

$$0 = 9,8 - \frac{v}{5}.$$

Assim, obtemos que este ponto crítico é $v = (5)(9,8) = 49\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Esse tipo de solução é chamada de *solução de equilíbrio*. Neste exemplo específico, a solução de equilíbrio corresponde a um equilíbrio entre gravidade e arrasto. Perceba que a função constante $v(t) = 49$ é uma solução da Equação (1.8). Para verificar essa afirmação, substitua $v(t) = 49$ na Equação (1.8) e observe que tanto o lado esquerdo quanto o lado direito de (1.8) resultará no mesmo valor.

Um outro fato importante que o campo de direções está nos mostrando é que todas as outras soluções parecem estar convergindo para o solução de equilíbrio à medida que t aumenta (veja a Figura 1.2).

Em resumo, os campos de direções são ferramentas que auxiliam o estudo das soluções de uma EDO na forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

que pode ser construído avaliando f em cada ponto de uma grade retangular. Em cada ponto da grade, um segmento é desenhado cuja inclinação é o valor de f naquele ponto. Assim, cada segmento de linha representa a tangente ao gráfico da solução que passa por esse ponto.

Um campo de direção desenhado em uma grade bastante fina dá uma boa noção sobre o comportamento geral das soluções de uma equação diferencial. A construção de um campo de direção é frequen-

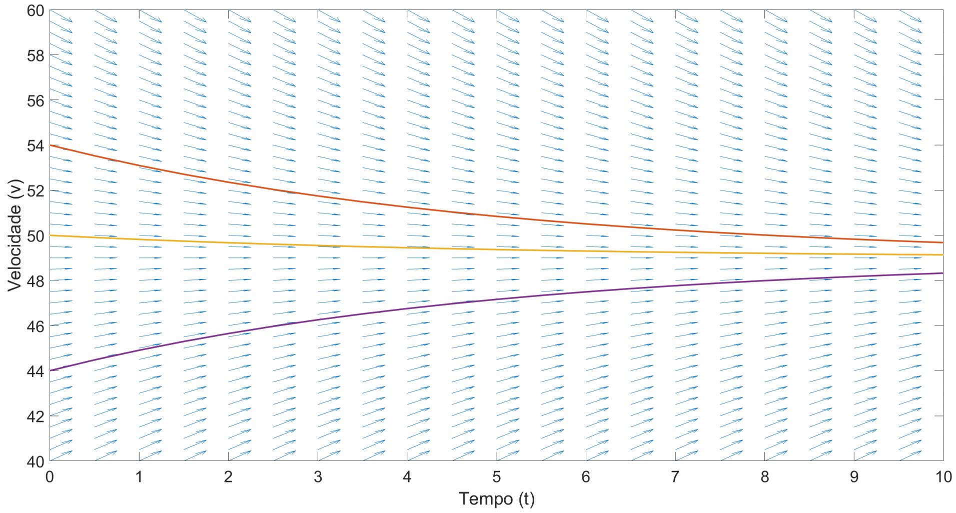

Figura 1.2: Soluções da equação diferencial (1.8)

temente um primeiro passo útil na investigação de uma equação diferencial.

Observação 1.2.1

1. *Na construção de um campo de direção, não temos que resolver a EDO propriamente dita, e sim, avaliar a função $f(t, x)$ muitas vezes. Com isso, os campos de direções podem ser facilmente construídos mesmo para equações que podem ser bastante difíceis de se resolver;*

2. *O cálculo da função $f(t, x)$ é uma tarefa que só faz sentido computacionalmente. O campo ilustrado na Figura 1.1 foi obtido através do Octave, mas pode ser calculado em outros* softwares*, como o* Mathematica *por exemplo (Figura 1.3 - veja o manual que se encontra na aba Material de Apoio).*

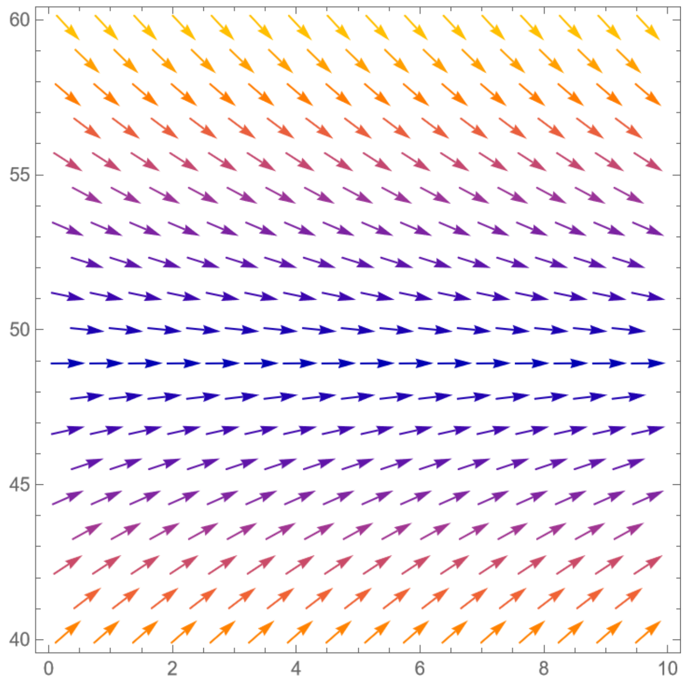

Figura 1.3: Campo de direções da equação diferencial (1.8)

Exercício 1.2.1 *Considere uma população de ratos de um campo rural. Na ausência de predadores assumimos que a população de ratos aumenta a uma taxa proporcional à população atual*[1] *Se denotarmos o tempo por t e a população de ratos por $r(t)$, determine:*

1. *A Equação Diferencial que descreve o crescimento desta população;*
2. *Utilize um* software *de sua escolha para descrever o campo de direções que representa a EDO do item anterior;*
3. *Escolha uma constante de crescimento fixa para o crescimento dos ratos. Suponha agora que estamos medindo o tempo em meses e que várias corujas vivem na mesma região. Se as corujas matam 15 ratos do campo por dia, como ficaria a EDO que modela o crescimento dos ratos mensalmente?*
4. *Determine o campo de direções que representa a EDO neste segundo caso;*
5. *Forneça uma interpretação dos campos de direções associados aos dois cenários.*

1.3 Modelos Matemáticos via Equações Diferenciais

As duas EDOs apresentadas na seção anterior possuem algumas limitações. Por exemplo, a equação diferencial $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v$ é válida apenas quando o objeto estiver caindo livremente. Já o **Exercício** 1.2.1 considera, eventualmente, o caso em que a população de ratos seja negativa (nesse caso, qual seria o valor limitante para que isso ocorresse?) ou ainda números muito grandes para a população $r(t)$. Isso torna os modelos acima não viáveis, já que não são realistas.

Tendo isso em mente, é necessário tomar alguns cuidados para que uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ seja o mais fiel possível a realidade. Tais modelos matemáticos podem ser úteis, por exemplo, quando decisões políticas devem ser tomadas. Imagine que se deseja prever a porcentagem de uma população que deve ser vacinada, de modo que a doença seja eliminada ou levada a um nível adequado de controle. Nesse caso, é essencial determinar e estudar o que acontece com a dinâmica da população, bem como as condições específicas em que ela se encontra e decidir quais são os parâmetros mais sensíveis para aumentar/diminuir a propagação da doença Segel and Edelstein-Keshet (2014).

Um modelo matemático pode ser entendido como uma caricatura de um sistema real, em que a essência é capturada e os detalhes são deixados de lado. O foco no essencial é uma característica central de um bom modelo. O tipo mais simples de modelo matemático é o descritivo. Por exemplo, observações experimentais podem ser ajustadas por uma linha reta ou pela soma de algumas funções exponenciais. Esses modelos descritivos resumem de forma concisa as informações experimentais e geralmente fornecem um direcionamento para o seu alvo de pesquisa.

Alguns modelos que descrevem esses sistemas são compostos por um conjunto de equações diferenciais. Por meio de uma análise dessas equações pode-se realizar uma previsão da dinâmica do fenômeno. Isso pode ser feito por exemplo através de simulações computacionais, que será o foco aqui. Com isso, as simulações computacionais podem: 1) auxiliar na investigação inicial do comportamento do modelo, antes de se aprofundar nos detalhes do fenômeno; 2) fazer previsões (quantitativas ou qualitativas); 3) explorar versões mais avançadas do modelo, de tal forma que uma abordagem analítica não seria razoável.

Em resumo, um modelo matemático não é uma verdade absoluta, mas nos auxilia em entender como um determinado fenômeno se comporta.

[1] Esta suposição não é unânime entre pesquisadores, mas é uma hipótese inicial comum em um estudo de crescimento populacional.

It could be argued that every model is a lie, because detail is neglected or major features distorted to bring out the most essential aspects. However, just because a model is wrong, is not sufficient reason to reject it, and just because a model is more or less right, is not sufficient reason to accept it. A "wrong" model may leave out inessential matters and therefore focus attention on what is important. A "right" model may be so laden with detail that the principal features are completely obscured. As Picasso said of art, a good model is "a lie that helps us see the truth."

Segel and Edelstein-Keshet (2014)

Para construir um modelo matemático é necessário reconhecer que cada problema é diferente, e que modelar não é uma técnica que pode ser simplificada em uma lista de tarefas. Na realidade, construir um modelo satisfatório é uma das etapas mais difíceis da pesquisa. No entanto, para auxiliar nessa habilidade, algumas observações devem ser consideradas no processo Boyce and DiPrima (2009): 1) Identifique as variáveis independentes e dependentes, representando-as por letras. Por exemplo, na EDO (1.8) o tempo t é a variável independente e a velocidade v é a variável dependente; 2) Escolha as unidades de medida para cada variável. Por exemplo, em (1.8) o tempo t estava sendo considerado em segundos, enquanto que no **Exercício 1.2.1** o tempo estava em meses; 3) Considere o princípio básico do problema e expresse-o utilizando as variáveis definidas no início. Por exemplo, em (1.8) foi considerada a lei da queda de corpos; 4) Verifique se as unidades de medida consideradas são compatíveis.

Exercício 1.3.1 *Determine uma equação diferencial que descreva cada um dos problemas abaixo:*

1. *Um material radioativo que se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade atual;*
2. *Uma população que não possui restrições de alimento e nem espaço, e portanto, cresce proporcional a ela mesma;*
3. *Uma população que cresce proporcional a ela mesma, mas que devido à limitação de recursos, há competição entre seus indivíduos;*
4. *A temperatura de um objeto que muda a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do próprio objeto e a temperatura em volta dele (lei de resfriamento de Newton);*
5. *Um grande objeto que cai rapidamente, cuja força de arrasto é proporcional ao quadrado de sua velocidade;*
6. *Uma população que cresce proporcional a ela mesma, mas quando há um encontro com seu predador, perde uma fração de sua população;*
7. *Uma população que tende à extinção quando não há alimentos, mas que cresce quando há um encontro com sua presa.*

Exercício 1.3.2 *Faça um esboço do campo de direções em cada um dos casos do* ***Exercício 1.3.1*** *e interprete qualitativamente a solução de cada EDO.*

Exercício 1.3.3 *A partir da EDO que foi proposta no* ***Exercício 1.3.1*** *e o campo de direções obtido em* ***Exercício 1.3.2****, como seria a expressão da solução de cada EDO?*

1.4 Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Encerramos a última seção com alguns exercícios que têm como objetivo caracterizar um fenômeno por meio de Equações Diferenciais, ou seja, algumas informações sobre um fenômeno foram fornecidas e como tarefa deveríamos determinar uma função $f(t,x)$ tal que $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$. Por exemplo, imagine que lhe foi atribuída a tarefa de modelar o seguinte: o lançamento de um objeto cuja aceleração é constante. Sabemos que a aceleração instantânea é definida pela segunda derivada da posição (ou também, como a primeira derivada da velocidade), assim:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c, \tag{1.9}$$

em que c é uma constante.

Integrando (em relação a t) em ambos os lados da Equação (1.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= c \\ \int \frac{d^2x}{dt^2}dt &= \int cdt \\ \frac{dx}{dt} &= ct + d, \end{aligned} \tag{1.10}$$

em que d é uma constante (obtida através da integração indefinida).

Nesse caso, obtemos $f(t,x) = ct + d$. Já a solução do problema (1.10) pode ser obtida integrando novamente em relação à variável t em ambos os lados da equação, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ct + d \\ \int \frac{dx}{dt}dt &= \int ct + d\ dt \\ x(t) &= c\frac{t^2}{2} + dt + a, \end{aligned}$$

em que a é uma constante (obtida através da integração indefinida).

No exemplo acima a função $f(t,x)$ não depende de x. Vejamos agora um caso em que f depende de x. No **Exercício 1.3.1**, item 2., foi considerada uma dinâmica populacional cujo crescimento é proporcional à ela mesma. Sendo assim, a EDO que descreve esse problema é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \tag{1.11}$$

em que λ é uma constante maior que zero e é chamada de *taxa de crescimento populacional*. Perceba que neste caso $f(t,x) = \lambda x$.

Tente novamente lembrar que a pergunta que está sendo feita é “Como deve ser uma função x de tal forma que sua taxa $\frac{dx}{dt}$ seja igual a λx?”. Para responder essa pergunta, não podemos simplesmente integrar em ambos os lados da equação, assim como fizemos em (1.9). Note que se tivéssemos considerado essa abordagem, cairíamos em uma integral $\int x(t)\ dt$, e como não sabemos qual função é x, não saberíamos qual técnica aplicar para resolver esta integral.

Alternativamente, podemos pensar em uma função que ao ser derivada resulta nela mesma (ou uma constante multiplicada por ela mesma). A função que tem essa característica é a função exponencial, isto é, $x(t) = e^{\lambda t}$. Perceba que de fato essa é uma solução do problema (1.11), já que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}e^{\lambda t}\\ &= \lambda(e^{\lambda t})\\ &= \lambda x\end{aligned}$$

Vejamos um outro exemplo. Um problema bastante estudado na área da Física é o de *Osciladores Harmônicos*. Um oscilador harmônico simples consiste em um sistema que contém um objeto de massa m, sobre o qual atua uma força F, que o empurra em direção do seu ponto inicial. Pela segunda lei de Newton, temos que

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Por outro lado, pela lei de Hooke temos que $F = -kx$, em que k é uma constante positiva. Assim, combinando as duas expressões, chegamos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

ou ainda,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx, \tag{1.12}$$

sendo $K = \frac{k}{m}$.

Uma solução para o problema (1.12) pode ser dada por $x(t) = sen(\sqrt{K}t)$, já que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sqrt{K}cos(\sqrt{K}t) \quad \Rightarrow\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\sqrt{K}\sqrt{K}sen(\sqrt{K}t)\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -Kx\end{aligned}$$

Por outro lado, a função $x(t) = cos(\sqrt{K}t)$ também é uma solução para o problema (1.12), pois

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sqrt{K}sen(\sqrt{K}t) \quad \Rightarrow\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\sqrt{K}\sqrt{K}cos(\sqrt{K}t)\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -Kx.\end{aligned}$$

Existe um resultado na Matemática que diz: "se x_1 e x_2 são soluções de uma EDO, então a combinação linear entre elas $ax_1 + bx_2$ também é uma solução para a EDO". Com isso, concluímos que a solução geral para o problema (1.12) é dada por $x(t) = acos(\sqrt{K}t) + bsen(\sqrt{K}t)$.

É importante ressaltar que nessa seção deduzimos a solução de uma EDO de uma forma analítica apenas no problema (1.9). Nesse problema foi possível obter a solução direta aplicando integrais em ambos os lados. No entanto, nos problemas (1.11) e (1.12) não é possível realizar esse processo. Nesses dois outros casos informamos quais são as soluções e verificamos que de fato elas satisfazem a igualdade. Podemos tentar obter tais soluções aplicando algumas técnicas, mas aqui vamos concentrar em duas delas: *equações separáveis* e *coeficientes constantes*. Entraremos em detalhes sobre esses métodos nas seções a seguir.

Observação 1.4.1

1. *As EDOs que aparecem em* (1.9) *e* (1.11) *são chamadas* Equações Diferenciais de Primeira Ordem*, pois envolvem apenas as derivadas de primeira ordem. Além disso, elas são chamadas de* lineares *pois são da forma:* $p(t)x' + q(t)x = r(t)$.
2. *A EDO que aparece em* (1.12) *é chamada de* Equação Diferencial de Segunda Ordem*, pois envolve derivada de até segunda ordem.*

Capítulo 2

Métodos analíticos para resolver EDOs

2.1 Equações Separáveis

Na seção anterior vimos como resolver uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ quando a função $f(t,x)$ não depende de x. Nesse caso, basta integrar em ambos os lados da equação diferencial para obter a solução do problema. Vamos estudar agora uma técnica para obter a solução de uma EDO no caso em que $f(t,x)$ depende da função $x(t)$.

Anteriormente vimos que $x(t) = e^{\lambda t}$ é uma solução para a EDO dada por $\frac{dx}{dt} = \lambda x$. Vamos agora utilizar o método das *equações separáveis* para obter esta solução. Tal método afirma que se uma equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\mu(t) + \eta(x)\frac{dx}{dt} = 0, \tag{2.1}$$

então a solução pode ser obtida seguindo os seguintes passos:

Passo 1: De um lado da equação diferencial deixe apenas as funções que dependam de x e do outro apenas o que depende de t. Isto é,

$$\eta(x)\frac{dx}{dt} = -\mu(t). \tag{2.2}$$

Passo 2: Isole o incremento dt, deixando-o com a função $\mu(t)$. Isto é,

$$\eta(x)dx = -\mu(t)dt. \tag{2.3}$$

Passo 3: Integre em ambos os lados da equação. Isto é,

$$\int \eta(x)dx = -\int \mu(t)dt. \tag{2.4}$$

Passo 4: Resolva as integrais impróprias determinando suas primitivas

$$N(x) = -M(t) + c \quad \Rightarrow \quad N(x) + M(t) = c, \tag{2.5}$$

em que $N' = \eta$ e $M' = \mu$. Assim, a expressão $N(x) + M(t) = c$ é a solução da EDO dada em (2.1).

Vamos então resolver a EDO $\frac{dx}{dt} = \lambda x$ via equações separáveis para ilustrar o método. Primeiro veja que é possível utilizar essa técnica já que neste caso

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda + \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 0$$

ou seja, $\eta(x) = \frac{1}{x}$ e $\mu(t) = -\lambda$.

Assim, separando as variáveis, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} &= \lambda \\ \frac{1}{x}dx &= \lambda dt \\ \int \frac{1}{x}dx &= \int \lambda dt \\ ln(x) &= \lambda t + c \end{aligned}$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados, temos que

$$\begin{aligned} e^{ln(x)} &= e^{\lambda t + c} \\ x &= e^{\lambda t}e^{c} \\ x(t) &= e^{\lambda t}c_0, \end{aligned}$$

em que $c_0 = e^c$ é uma constante.

Na seção anterior vimos que $x(t) = e^{\lambda t}$ é uma solução para EDO *Malthusiana* $\frac{dx}{dt} = \lambda x$. A partir desse método vimos que qualquer constante multiplicada por $e^{\lambda t}$ também é uma solução da equação de Malthus.

Existe um resultado da matemática que diz que se x é uma solução para uma EDO, então a multiplicação por escalar também é solução desta EDO.

Observação 2.1.1

1. *O método das equações separáveis é utilizado com certa frequência. No entanto, nem sempre é possível aplicar este método, já que nem sempre é possível fazer a separação das variáveis.*

2. *O método apresentado possui alguns abusos de formalismo matemático. O raciocínio matemático envolvido nessa técnica parte do pressuposto que a EDO pode ser escrita na forma*

$$\mu(t) + \eta(x)\frac{dx}{dt} = 0, \tag{2.6}$$

sendo $\mu(t)$ uma função que dependa só de t e $\eta(x)$ uma função que dependa só de x. A partir disso, consideramos M e N como sendo as primitivas de μ e η, respectivamente. Isto é, $\frac{dM}{dt} = \mu(t)$ e $\frac{dN}{dx} = \eta(x)$. Logo, a Equação (2.6) fica:

$$\frac{dM(t)}{dt} + \frac{dN(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = 0. \tag{2.7}$$

Note que a segunda parcela da soma pode ser obtida derivando a função $N(x)$ em relação a t pela regra da cadeia, ou seja,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN(x)}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Com isso, a Equação (2.7) fica:

$$\frac{dM(t)}{dt} + \frac{dN(x)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(M+N)}{dt} = 0. \tag{2.8}$$

Implicando que $M(t) + N(x) = c$.

Exercício 2.1.1 *Aplique o método das equações separáveis para resolver a equação diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = rx\,(1-x)\,. \tag{2.9}$$

A Equação (2.9) *é chamada de* equação logística *ou* modelo de Verhulst *simplificado e pode ser utilizado para modelar crescimento populacional, assim como o modelo de Euler.* ***Dica:*** *a fração* $\frac{1}{x(1-x)}$ *pode ser escrita como* $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$.

Exercício 2.1.2 *Escreva o campo de direções da EDO* (2.9)*. Descreva o comportamento da população para os casos: a)* $x(0) = 0,25$*; b)* $x(0) = 1$*; c)* $x(0) = 1,5$.

Exercício 2.1.3 *Considere agora a solução obtida no* ***Exercício 2.1.1****. Determine as constantes de integração considerando: a)* $x(0) = 0,25$*; b)* $x(0) = 1$*; c)* $x(0) = 1,5$*. Este tipo de problema é chamado de* Problema de Valor Inicial *(PVI).*

2.2 Problemas de Valores Iniciais (PVIs)

Pelo método das equações separáveis conseguimos resolver a equação de Malthus e concluir que a solução da equação diferencial é dada por $x(t) = c_0 e^{\lambda t}$, sendo c_0 e λ constantes com $\lambda > 0$. Isso significa que para cada valor que c_0 assumir, teremos uma solução diferente para o problema (veja a Figura 2.1). Em outras palavras, a constante c_0 vai interferir no que chamamos de condição inicial.

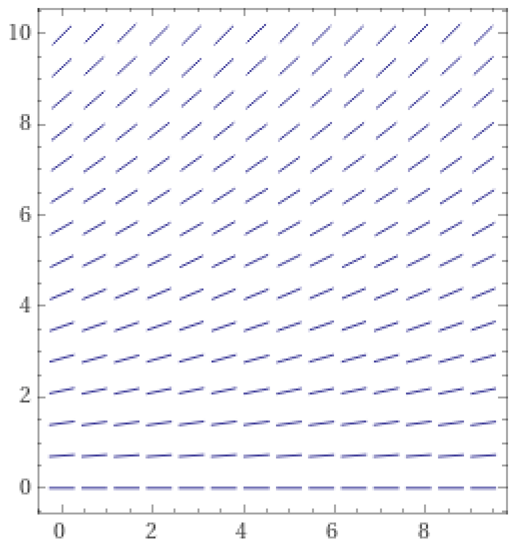

Figura 2.1: Campo de direções da equação diferencial de Malthus

Um *Problema de Valor Inicial (PVI)* é definido como sendo um sistema formado por uma equação diferencial e uma *condição inicial*, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.10}$$

O valor $x(0)$ no sistema (2.10) indica a posição inicial da solução. Por exemplo, na Figura 1.2 ilustramos a solução de uma EDO a partir de três condições iniciais distintas: a) condição inicial igual a 44 (curva em roxo); b) condição inicial igual a 50 (curva em amarelo); c) condição inicial igual a 54 (curva em vermelho). Cada uma com um comportamento diferente.

Existe um resultado na matemática que diz que, sob certas hipóteses razoáveis, todo PVI admite solução única. Esse resultado é conhecido como o *Teorema de Existência e Unicidade para EDOs*[1] Com isso, escolhendo a condição inicial $x(0)$ obtemos uma única resposta para a EDO.

Agora, como determinar a constante c_0 a partir da condição inicial? Suponha que queiramos obter a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(0) = 2 \in \mathbb{R} \end{cases} . \tag{2.11}$$

Assim, pelo método das equações separáveis temos que a solução é dada por $x(t) = c_0 e^{\lambda t}$. A partir da condição inicial $x(0) = 2$, segue que

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & c_0 e^{\lambda t} \\ \Rightarrow & x(0) & = & c_0 e^{\lambda 0} \\ \Rightarrow & 2 & = & c_0 e^{0} \\ \Rightarrow & 2 & = & c_0 \end{array}$$

Logo, a constante c_0 é dada por $c_0 = 2$, e assim, a solução única do PVI (2.11) é dada por $x(t) = 2e^{\lambda t}$.

Um segundo exemplo seria a partir da equação de Verhulst (veja Equação (2.9)), cuja solução geral é dada por $x(t) = \frac{ce^{rt}}{1+ce^{rt}}$. Supondo que a EDO tenha como condição inicial $x(0) = 2$, então a constante c da solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1-x) \\ x(0) = 2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.12}$$

é calculada por

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & \dfrac{ce^{rt}}{1+ce^{rt}} \\ \Rightarrow & x(0) & = & \dfrac{ce^{0}}{1+ce^{0}} \\ \Rightarrow & 2 & = & \dfrac{c}{1+c} \\ \Rightarrow & 2(1+c) & = & c \\ \Rightarrow & 2+2c & = & c \\ \Rightarrow & c & = & -2. \end{array}$$

[1]O teorema de existência e unicidade para EDOs foi estabelecido por Charles Émile Picard, Ernst Leonard Lindelöf (Teorema de Picard-Lindelöf), Rudolf Lipschitz e Augustin Louis Cauchy (Teorema de Cauchy-Lipschitz), cuja demonstração pode ser obtida transformando a equação diferencial em um problema de equação integral e aplicando o teorema de ponto fixo de Banach.

Portanto, a solução do PVI (2.12) é $x(t) = \frac{-2e^{rt}}{1-2e^{rt}}$.

Por fim, vamos apresentar um último exemplo. Retomando ao problema do lançamento de um objeto cuja aceleração é constante (veja Equação (1.9)), verificamos por meio de integração direta que a solução é da forma $x(t) = c\frac{t^2}{2} + dt + a$, sendo d e a constantes de integração e c dado no problema $\left(\frac{d^2x}{dt^2} = c\right)$. Perceba que agora apenas uma condição inicial não é sufiente para determinar a solução única deste problema. Isto é, suponha que tenhamos a condição inicial $x(0) = 2$. Assim,

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & c\dfrac{t^2}{2} + dt + a \\ \Rightarrow & x(0) & = & c\dfrac{0^2}{2} + d0 + a \\ \Rightarrow & 2 & = & a. \end{array}$$

Logo, obtemos como solução $x(t) = c\frac{t^2}{2} + dt + 2$, sendo d um valor qualquer. Isso acontece porque agora temos uma equação diferencial que envolve a segunda derivada, e não mais a primeira derivada. Sendo assim, é preciso estabelecer uma condição inicial não somente para a posição inicial $x(0)$, mas também a velocidade inicial $x'(0)$. Em outras palavras, para uma EDO de segunda ordem como essa, o PVI é dado por:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = c \\ x(0) = 2 \in \mathbb{R} \\ x'(0) = 1 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.13}$$

Portanto, para obter a constante d fazemos:

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & c\dfrac{t^2}{2} + dt + 2 \\ \Rightarrow & x'(t) & = & ct + d \\ \Rightarrow & x'(0) & = & c0 + d \\ \Rightarrow & 1 & = & d. \end{array}$$

Portanto, a solução única do PVI (2.13) é dada por $x(t) = c\frac{t^2}{2} + t + 2$, sendo c um valor constante determinado pelo enunciado do problema.

De um modo geral, para determinar a solução única de uma *equação diferencial ordinária de ordem* n é preciso saber as condições iniciais de $x(0)$ e das $n-1$ derivadas de x. Isto é, o PVI deve ser da forma:

$$\begin{cases} \frac{d^nx}{dt^n} = f(t, x, \ldots, x^{n-1}) \\ x(0) \in \mathbb{R} \\ x'(0) \in \mathbb{R} \\ \quad \vdots \\ x^{(n-1)}(0) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.14}$$

2.3 Método dos Coeficientes Constantes para Equações Homogêneas de Segunda Ordem

Nesta seção estudaremos um método para resolver equações diferenciais de segunda ordem. Uma EDO de *segunda ordem* é uma equação diferencial que possui a seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2}P + \frac{dx}{dt}Q + xR = S,$$

em que P, Q, R e S são funções. Caso essas funções dependam só do tempo, isto é,

$$\frac{d^2x}{dt^2}P(t) + \frac{dx}{dt}Q(t) + xR(t) = S(t), \tag{2.15}$$

a EDO é chamada de *linear*. Caso contrário a EDO é chamada de *não linear*.

Se $S(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então a EDO é chamada de *homogênea*. Caso contrário, a EDO é chamada de *não homogênea*. Vamos no concentrar em primeiro resolver EDOs homogêneas, para depois analisar o caso da não homogênea.

Considere a EDO homogênea dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2}P(t) + \frac{dx}{dt}Q(t) + xR(t) = 0. \tag{2.16}$$

O *método dos coeficientes constantes* foi desenvolvido para resolver a Equação (2.16) no caso em que as funções $P(t), Q(t)$ e $R(t)$ são constantes. Aqui denotaremos tais funções simplesmente por $P(t) = p, Q(t) = q$ e $R(t) = r$.

A primeira etapa para resolver este problema é associar a EDO (2.16) a uma equação polinomial de segunda ordem, isto é, a segunda e primeira derivada serão associadas ao polinômio quadrático e linear, respectivamente. Enquanto que o o termo x de (2.16) será associado ao termo linear do polinômio. Em outras palavras, temos a seguinte associação:

$$\frac{d^2x}{dt^2}p + \frac{dx}{dt}q + xr = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda^2 p + \lambda q + r = 0.$$

A equação $\lambda^2 p + \lambda q + r = 0$ é chamada de *equação característica*. Assim, para resolver este problema devemos encontrar as raízes deste polinômio, podendo cair em três casos:

1) Duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2: Neste caso, a solução da EDO (2.16) é dada por[2]:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Por exemplo, a EDO dada por $x'' + 5x' + 6x = 0$, cuja equação característica é $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, possui duas raízes $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$. Portanto, sua solução geral é dada por $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$.

[2] É importante observar que cada termo $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ por si só já são soluções da EDO. No entanto, o *princípio da superposição* garante que qualquer combinação linear de duas soluções linearmente independentes formam uma solução geral para a EDO. Assim $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ é uma solução geral, pois pelo *Wronskiano* as funções $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ são linearmente independentes.

2) Uma raiz real λ: Neste caso, a solução da EDO (2.16) é dada por[3]:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Por exemplo, a EDO dada por $x'' + 2x' + x = 0$, cuja equação característica é $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, possui raíz $\lambda_1 = -1$. Portanto, sua solução geral é dada por $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$.

3) Duas raízes complexas conjugadas $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$: Neste caso, a solução da EDO (2.16) é dada por[4]:

$$x(t) = e^{at} \left(c_1 cos(bt) + c_2 sen(bt) \right).$$

Por exemplo, a EDO dada por $16x'' - 8x' + 145x = 0$, cuja equação característica é $16\lambda^2 - 8\lambda + 145 = 0$, possui duas raízes $\lambda_1 = \frac{1}{4} + 3i$ e $\lambda_2 = \frac{1}{4} - 3i$. Portanto, sua solução geral é dada por $x(t) = e^{\frac{1}{4}t}(c_1 cos(3t) + c_2 sen(3t))$.

É interessante observar que essa técnica podem ser estendida para EDOs de ordem superior. A partir dessas expressões, podemos também analisar qualitativamente as soluções em cada caso.

Quando aplicamos o método dos coeficientes constantes e obtemos duas raízes reais, então a solução converge para 0 se ambas as raízes forem negativas, já que $e^{\lambda t} \to 0$ quando $t \to \infty$, sendo $\lambda < 0$. Por outro lado, caso uma das raízes seja positiva, então a solução diverge, isto é, $e^{\lambda t} \to \infty$ quando $t \to \infty$, sendo $\lambda > 0$. De modo similar, no caso em que apenas uma raiz é encontrada, a solução converge para 0 somente quando $\lambda < 0$.

Por fim, no caso das raízes complexas, como as funções seno e cosseno são periódicas, temos que se a parte real da raiz for positiva, então a solução diverge de modo oscilatório, enquanto que se a raiz for negativa, então a solução converge para 0 de modo oscilatório. Quando a raiz for um número imaginário puro, então a solução será da forma periódica, isto é, terá um comportamento de oscilação com período constante.

Observação 2.3.1 *Na área da Matemática existe um resultado chamado de* princípio da superposição*. Este princípio afirma que se duas funções x_1 e x_2 são soluções de uma EDO, então a combinação linear entre elas $ax_1 + bx_2$ também é uma solução. Por outro lado, para encontrar uma solução geral de uma EDO, precisamos determinar funções x_1 e x_2 que sejam linearmente independentes. Para esse propósito, utilizamos o* Wronskiano*, que é definido por:*

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Caso esse determinante seja diferente da função nula, então concluímos que o conjunto de funções

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

é linearmente independente. Caso contrário, este conjunto é linearmente dependente.

[3]Como se tem apenas uma solução associada a EDO, então para este caso utilizamos o *método da redução de ordem* para determinar qual é a segunda função que compõe a solução geral. Para EDOs com coeficientes constantes, verifica-se que os candidatos têm a forma $te^{\lambda t}$. Mais uma vez, pelo Wronskiano comprova-se que a solução geral tem a forma $x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$.

[4]Como os temos duas raízes complexas, então as soluções são da forma $x_1(t) = e^{(a+bi)t}$ e $x_2(t) = e^{(a-bi)t}$. Pela *fórmula de Euler* as soluções podem ser escritas por $x_1(t) = e^{at}(cos(bt) + isen(bt))$ e $x_2(t) = e^{at}(cos(bt) - isen(bt))$, respectivamente. Por meio das combinações lineares $x_1(t) + x_2(t)$ e $x_1(t) - x_2(t)$, e analisando o Wronskiano, obtem-se que a solução é dada por $x(t) = e^{at} \left(c_1 cos(bt) + c_2 sen(bt) \right)$.

Exercício 2.3.1 *Determine a solução da EDO dada por $x'' + 9x = 0$ e forneça uma interpretação para sua solução.*

Exercício 2.3.2 *Resolva o seguinte PVI*

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = 0 \\ x(0) = 5 \\ x'(0) = -3 \end{cases}$$

Exercício 2.3.3 *Resolva o seguinte PVI*

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

e em seguida forneça uma análise qualitativa da solução obtida.

Exercício 2.3.4 *Faça o campo de direções de todas as EDOs descritas nos exercícios anteriores e analise-os. Compare sua análise com o comportamento das soluções obtidas.*

2.4 Solução Geral para Equações Diferenciais Ordinárias Não Homogêneas

Na seção anterior vimos como obter as soluções de EDOs homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, mas não abordamos o caso em que a EDO é não homogênea, ou seja, a função $S(t)$ dada em (2.15) é não nula. Para resolver esse tipo de problema, precisamos obter dois tipos de soluções, a *solução da EDO homogênea associada* (denotada por x_h) e *solução particular da EDO* (denotada por x_p).

A solução x_h é obtida por técnicas como equações separáveis, método dos coeficientes constantes, *fator integrante* Boyce and DiPrima (2009), entre outros. Essa solução sempre está associada[5] com uma EDO da forma

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t), \tag{2.17}$$

considerando que $g(t) = 0$.

Por outro lado a solução x_p, que está associada a mesma EDO (2.17), resolve o caso em que $g(t) \neq 0$. Existem algumas formas de obter a solução particular, das quais veremos a seguir, mas o importante observar aqui é o seguinte resultado fornecido na teoria de Equações Diferenciais.

Teorema 2.4.1 *Dada uma EDO qualquer na forma (2.17), a solução geral x para este problema é dada por*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

em que x_h e x_p são as soluções da EDO homogênea associada e a particular da EDO não homogênea, respectivamente.

[5] É importante observar que mesmo se a EDO original tiver uma função $g(t) \neq 0$ (por exemplo se for uma função $g(t) = sen(t)$ ou $g(t) = e^t$), a solução x_h só resolve o caso em que $g(t) = 0$. Por isso a terminologia "solução da EDO homogênea associada"

Observação 2.4.1

1. *Um* Sistema Dinâmico *é definido a partir de qualquer sistema físico, químico ou biológico que evolua no tempo. Um sistema dinâmico cujo modelo matemático é uma EDO de ordem n, dado por* (2.17)*, é chamado de* sistema linear*.*

2. *As funções $x, x', \ldots, x^n$ dadas na EDO* (2.17) *são chamadas de* variáveis de estado*. A função $g(t)$ é chamada de* função de entrada *ou* função forçante*.*

O Teorema 2.4.1 afirma que toda solução geral de uma EDO é formada pela soma da solução homogênea com a solução particular. Sendo assim, nos resta estudar técnicas para obter as soluções particulares x_p. Para isso, precisamos analisar as características da função forçante $g(t)$. Por exemplo, considere a seguinte EDO

$$x'' + 5x' + 6x = 2t^2 - 3t + 6. \tag{2.18}$$

A solução da EDO homogênea, conforme visto na seção anterior, é dada por $x_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}$. Agora vejamos qual é a solução particular para este problema. Para isso vamos recorrer a uma técnica chamada *determinação de coeficientes da solução particular*. Nesta EDO temos que $g(t) = 2t^2 - 3t + 6$ é uma função polinomial. Assim, o que a EDO (2.18) está nos dizendo é que uma combinação das derivadas de uma função x resulta em um polinômio de grau 2. Portanto, é razoável supor que uma solução particular para este problema seja da forma $x_p(t) = At^2 + Bt + C$.

Assumimos então que a solução particular é dada dessa forma e temos como objetivo determinar os coeficientes A, B e C. Pois bem, se $x_p(t) = At^2 + Bt + C$, então:

$$\begin{cases} x_p'(t) = 2At + B \\ x_p''(t) = 2A \end{cases}$$

Substituindo na EDO (2.18), obtemos

$$(2A) + 5(2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) = 2t^2 - 3t + 6$$

Para facilitar a análise, vamos rearranjar os termos colocando em evidência tudo o que acompanha o fator t^2, tudo que acompanha t e tudo o que é constante, isto é,

$$\begin{aligned} 2A + 10At + 5B + 6At^2 + 6Bt + 6C &= 2t^2 - 3t + 6 \\ t^2(6A) + t(10A + 6B) + (2A + 5B + 6C) &= 2t^2 - 3t + 6 \\ t^2(6A) + t(10A + 6B) + (2A + 5B + 6C) &= 2t^2 - 3t + 6 \end{aligned}$$

Lembrando que dois polinômios são iguais, se e somente se, seus respectivos coeficientes são iguais. A partir disso, obtemos o seguinte sistema associado

$$\begin{cases} 6A = 2 \\ 10A + 6B = -3 \\ 2A + 5B + 6C = 6 \end{cases},$$

isto é, chegamos que $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{19}{18}$ e $C = \frac{191}{108}$. Portanto, a solução particular para a EDO (2.18) é dada por

$$x_p(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{19t}{18} + \frac{191}{108},$$

e assim, a solução geral é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{19t}{18} + \frac{191}{108}.$$

Perceba que a solução geral depende diretamente do tipo da função $g(t)$. Para ficar clara esta ideia, vamos analisar a mesma EDO, mas neste caso vamos supor que $g(t) = sen(2t)$. Pois bem, neste caso particular, estamos dizendo que as derivadas de uma função $x(t)$ resultam na função trigonométrica $sen(2t)$. Como as derivadas desse tipo de função oscilam entre seno e cosseno, faz sentido supor que a solução particular deste problema é da forma $x_p(t) = Asen(2t) + Bcos(2t)$. Seguindo os mesmos passos que no exemplo anterior, temos que

$$\begin{cases} x_p'(t) = 2Acos(2t) - 2Bsen(2t) \\ x_p''(t) = -4Asen(2t) - 4Bcos(2t) \end{cases}.$$

Substituindo na EDO, temos que

$$\begin{aligned} (-4Asen(2t) - 4Bcos(2t)) + 5(2Acos(2t) - 2Bsen(2t)) + 6(Asen(2t) + Bcos(2t)) &= sen(2t) \\ -4Asen(2t) - 4Bcos(2t) + 10Acos(2t) - 10Bsen(2t) + 6Asen(2t) + 6Bcos(2t) &= sen(2t) \\ sen(2t)(-4A - 10B + 6A) + cos(2t)(-4B + 10A + 6B) &= 1sen(2t) + 0cos(2t) \\ sen(2t)(2A - 10B) + cos(2t)(2B + 10A) &= 1sen(2t) + 0cos(2t) \end{aligned}$$

Chegamos então no seguinte sistema

$$\begin{cases} 2A - 10B = 1 \\ 10A + 2B = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema linear, chegamos que $A = \frac{1}{52}$ e $B = -\frac{5}{52}$. Portanto, a solução particular x_p é dada por $x_p(t) = \frac{sen(2t)}{52} + \frac{-5cos(2t)}{52}$. Consequentemente, a solução geral é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{sen(2t)}{52} + \frac{-5cos(2t)}{52}.$$

Resumindo, o método de obtenção dos coeficientes consiste em determinar uma solução particular que tenha características comuns a função forçante $g(t)$. Se, por exemplo, a função $g(t)$ for da forma $g(t) = t^2 + cos(2t)$, então a solução particular deve ser da seguinte forma

$$x_p(t) = \text{função polinomial} + \text{combinação entre as funções seno e cosseno}$$

No entanto, é preciso tomar alguns cuidados. Considere a seguinte EDO $x'' - 5x' + 4x = 8e^t$. Neste caso, supor que a solução particular é da forma $x_p(t) = Ae^t$ pode não ser o melhor caminho. Perceba que as derivadas da função x_p serão constantes multiplicadas a própria função exponencial. Em outras palavras, as derivadas da função exponencial não gera novas funções. Isso significa que se supormos uma solução particular da forma $x_p(t) = Ae^t$, chegaremos que a EDO original do problema irá resultar em $0 = 8e^t$, o que é uma contradição. Perceba que também que a equação característica associada a equação homogênea possui duas raízes negativas, e portanto, a solução homogênea é da forma $x_h(t) = c_1e^{\lambda_1} + c_2e^{\lambda_2}$. Sendo assim, a solução particular $x_p(t) = Ae^t$ faz parte da homogênea, não resultando na solução geral do problema. Para contornar esse problema, podemos supor então que a solução particular é da forma $x_p(t) = Ate^t$.

Exercício 2.4.1 *Determine a solução geral para a EDO $x'' - 5x' + 4x = 8e^t$, tomando como pressuposto que a solução particular é da forma $x_p(t) = Ate^t$.*

Exercício 2.4.2 *Considere uma partícula de carga q imersa em um meio viscoso, e que sob ele age um campo elétrico E, a princípio constante. As forças atuantes no sistema são a do campo elétrico $F_e = qE$ e a da resistência ao movimento dada pelo meio viscoso $F_d = -bv$, onde v é a velocidade. Assim, pela equação do movimento de Newton, temos que $ma = F_e + F_d$ resultando na seguinte equação diferencial*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = qE$$

1. *Determine o movimento da partícula para o caso em que E é um valor constante.*

2. *Determine o movimento da partícula para o caso em que $E = E(t) = cos(t)$.*

3. *Determine as constantes da solução geral, sabendo que $x(0) = 0$ e $v(0) = x'(0) = 0$, ou seja, que a partícula se encontra inicialmente na origem do sistema de coordenadas e em repouso.*

Observação 2.4.2 *Abaixo segue uma tabela com candidatas para soluções particulares de EDOs a partir das funções forçantes $g(t)$ Zill (2011).*

$g(t)$	Forma da solução particular $x_p(t)$
Constante	A
Polinômio de grau n	$A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \ldots + A_1t + A_0$
$sen(at)$	$Asen(at) + Bcos(at)$
$cos(bt)$	$Asen(bt) + Bcos(bt)$
e^{at}	Ae^{at}
t^ne^{at}	$e^{at}(A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \ldots + A_1t + A_0)$
$t^nsen(at)$	$(Asen(at) + Bcos(at))(A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \ldots + A_1t + A_0)$
$t^ncos(at)$	$(Asen(at) + Bcos(at))(A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \ldots + A_1t + A_0)$

Tabela 2.1: Forma das soluções particulares a partir da função forçante.

Capítulo 3

Estudo de equilíbrio para EDOs

Vamos introduzir o estudo sobre pontos de equilíbrio para EDOs começando por *equações diferenciais autônomas*, isto é, uma EDO $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, sendo t a variável independente e x a variável dependente, é chamada de autônoma se $\frac{dx}{dt}$ depende (explicitamente) apenas de sua variável x. Por exemplo, $\frac{dx}{dt} = 2x$ é uma EDO autônoma, enquanto que $\frac{dx}{dt} = 2x - t$ é não autônoma. Nesse caso, EDOs autônomas podem ser denotadas por $\frac{dx}{dt} = f(x)$, já que não dependem de t explicitamente[1].

Um *ponto de equilíbrio* de uma EDO é definido como sendo aquele que não possui mudança na sua derivada, isto é, quando $\frac{dx}{dt} = 0$. Por exemplo, considere a seguinte EDO autônoma:

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)(1 + x) \tag{3.1}$$

O campo de direções da EDO 3.1 pode ser visto na Figura 3.1.

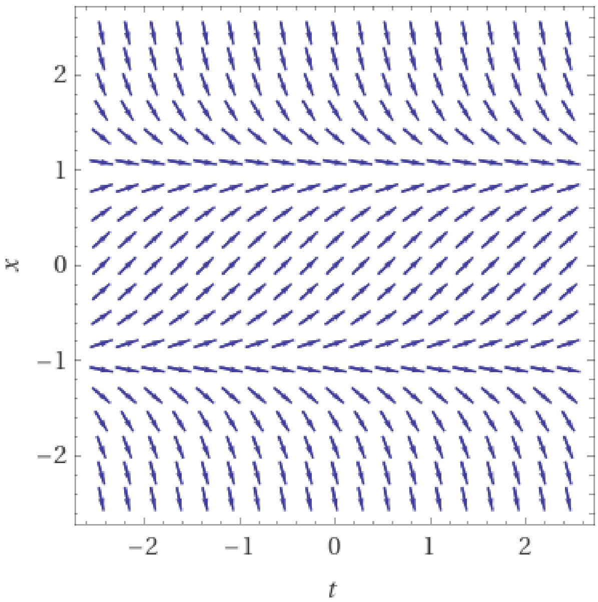

Figura 3.1: Campo de direções da EDO $\frac{dx}{dt} = (1 - x)(1 + x)$.

Para determinar os pontos de equilíbrio desta EDO precisamos verificar para quais valores de x

[1]É importante observar que mesmo que a variável independente t não apareça na expressão $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, x é uma função que depende de t, e portanto, a EDO depende implicitamente da variável t.

temos que $\frac{dx}{dt} = 0$. Pois bem,

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & 0 \\ (1-x)(1+x) & = & 0 \\ (1-x)=0 & \text{ou} & (1+x)=0 \\ x=1 & \text{ou} & x=-1. \end{array}$$

Portanto, concluímos que existem dois pontos de equilíbrio para a EDO 3.1, $x = 1$ e $x = -1$. Perceba na Figura 3.1 o motivo de termos dado o nome de equilíbrio para tais pontos. Se começarmos a dinâmica nas alturas $x = 1$ ou $x = -1$ não haverá mudança (variação na inclinação) da solução ao longo do tempo.

3.1 Classificação de pontos de equilíbrio

Além de encontrar tais pontos é possível também classificá-los. Um ponto de equilíbrio $\overline{x}$ é chamado de *assintoticamente estável* se $\overline{x}$ for um atrator, isto é, se tomarmos pontos x próximos de $\overline{x}$ temos que ao longo do tempo x estará cada vez mais próximo de $\overline{x}$. Um ponto de equilíbrio $\overline{x}$ é chamado de *instável* se $\overline{x}$ for um repulsor, isto é, se tomarmos pontos x próximos de $\overline{x}$ temos que ao longo do tempo x estará cada vez mais longe de $\overline{x}$.

No campo de direções ilustrado na Figura 3.1 podemos ver que $x = 1$ é assintoticamente estável, enquanto que $x = -1$ é instável. Visualmente podemos constatar isso, mas podemos verificar esse fato algebricamente. Analisemos primeiro $\overline{x} = 1$. Considere x um ponto que esteja próximo (abaixo) de $\overline{x}$, ou seja, $0 < x < \overline{x} = 1$. Assim temos que $1 - x > 0$ e $1 + x > 0$[2]. Isso significa que $(1 - x)(1 + x) > 0$, e portanto, $\frac{dx}{dt} > 0$. Sendo assim, x "sobe" quando está abaixo de $\overline{x} = 1$. De modo similar, tomando x um ponto que esteja próximo (acima) de $\overline{x}$, ou seja, $1 = \overline{x} < x < 2$ temos que $1 - x < 0$ e $1 + x > 0$. Isso significa que $(1 - x)(1 + x) < 0$, e portanto, $\frac{dx}{dt} < 0$. Sendo assim, x "desce" quando está acima de $\overline{x} = 1$. Logo $\overline{x} = 1$ é um ponto assintoticamente estável, já que é um atrator.

Observação 3.1.1 *Aproveitamos para fazer um breve comentário. Perceba que não existe a possibilidade a solução "cruzar" um ponto de equilíbrio $\overline{x}$, já que uma vez que a solução x chegue neste ponto, temos que $x = \overline{x}$ para todo valor de t.*

Para classificar o ponto de instabilidade, fazemos a mesma análise apresentada acima. Considere agora $\overline{x} = -1$. Tomando x um ponto que esteja próximo (acima) de $\overline{x}$, ou seja, $-1 = \overline{x} < x < 0$ temos que $1 - x > 0$ e $1 + x > 0$. Isso significa que $(1 - x)(1 + x) > 0$, e portanto, $\frac{dx}{dt} > 0$. Sendo assim, x "cresce" quando está acima de $\overline{x} = -1$. Por outro lado, tomando x um ponto que esteja próximo (abaixo) de $\overline{x}$, ou seja, $-2 < x < \overline{x} = -1$ temos que $1 - x > 0$ e $1 + x < 0$. Isso significa que $(1 - x)(1 + x) < 0$, e portanto, $\frac{dx}{dt} < 0$. Sendo assim, x "desce" quando está abaixo de $\overline{x} = -1$. Logo $\overline{x} = -1$ é um ponto instável, já que é um repulsor.

Essa classificação geralmente é representada graficamente pela Figura 3.2.

Para resumir todos os conceitos vistos acima, considere novamente o exemplo do objeto em queda, dado na equação (1.8), isto é,

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}.$$

[2]Caso tenha dificuldades nessa análise, atribua alguns valores, por exemplo, tome $x = 0.5$. Nesse caso, $(1 - x) = (1 - 0.5) = 0.5 > 0$ e $(1 + x) = (1 + 0.5) = 1.5 > 0$.

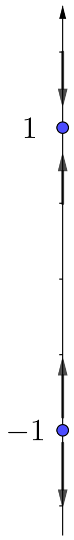

Figura 3.2: Pontos atratores e repulsores da EDO (3.1)

O ponto de equilíbrio dessa EDO é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 0 \\
9,8-\frac{v}{5} &= 0 \\
9,8 &= \frac{v}{5} \\
v &= 5(9,8) \\
v &= 49.
\end{aligned}$$

Tomando valores $x > 49$ temos que $\frac{dx}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5} < 0$. Por outro lado, tomando valores $x < 49$ temos que $\frac{dx}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5} > 0$. Portanto, $\overline{x} = 49$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, como pode ser verificado na Figura 1.2.

Para fixar as ideias e a mecânica do problema de determinar pontos de estabilidade e suas classificações, sugerimos o seguinte exercício:

Exercício 3.1.1 *Determine e classifique os pontos de equilíbrio dos modelos de Malthus e Verhulst.*

Exemplo 3.1.1 (Estudo de reações químicas Boyce and DiPrima (2009)) *Considere uma lagoa que contém inicialmente 10 milhões de galões de água doce. A água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5 milhões de gal/ano, e a mistura na lagoa flui na mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ de produto químico na água de entrada varia periodicamente com o tempo de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + sen(2t)$ g/gal.*

Como os fluxos de entrada e saída de água são os mesmos, a quantidade de água na lagoa permanece constante em 10^7 gal. Vamos denotar o tempo por t, medido em anos, e o produto químico por $Q(t)$, medido em gramas. Para construir a equação diferencial que descreve esse processo, vamos partir do princípio que a variação $\frac{dQ}{dt}$ é dada pela taxa de entrada menos a taxa de saída, isto é,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}, \tag{3.2}$$

em que "taxa de entrada" e "taxa de saída" significam as taxas nas quais o produto químico flui para dentro *e para fora da lagoa, respectivamente.*

A taxa de entrada é dada por

$$\textit{Taxa de entrada } = 5\times 10^6(2+sen(2t)) \textit{ g/ano},$$

enquanto que a taxa de saída é dada por

$$\textit{Taxa de saída } = 5\times 10^6\left(\frac{Q(t)}{10^7}\right) = \frac{Q(t)}{2} \textit{ g/ano}.$$

Portanto, a EDO (3.2) fica

$$\frac{dQ}{dt} = (5\times 10^6)(2+sen(2t)) - \frac{Q(t)}{2}. \tag{3.3}$$

Com o intuito de simplificar o termo 10^6, fazemos a seguinte substituição $Q(t) = q(t)10^6$. Com isso, temos que a expressão (3.3) fica:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= (5\times 10^6)(2+sen(2t)) - \frac{Q(t)}{2}\\
\frac{dq(t)10^6}{dt} &= (5\times 10^6)(2+sen(2t)) - \frac{q(t)10^6}{2}\\
\frac{1}{10^6}\frac{dq(t)10^6}{dt} &= \frac{1}{10^6}\left((5\times 10^6)(2+sen(2t)) - \frac{q(t)10^6}{2}\right)\\
\frac{1}{10^6}10^6\frac{dq(t)}{dt} &= \frac{1}{10^6}(5\times 10^6)(2+sen(2t)) - \frac{1}{10^6}\frac{q(t)10^6}{2}\\
\frac{dq(t)}{dt} &= 5(2+sen(2t)) - \frac{q(t)}{2}\\
\frac{dq(t)}{dt} &= 10+5sen(2t) - \frac{q(t)}{2}\\
\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{2} &= 10+5sen(2t)
\end{aligned}$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea. Além disso, assumimos que originalmente não há produtos químicos na lagoa, logo esse problema se torna um PVI cuja condição inicial é $q(0) = 0$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{2} = 10+5sen(2t) \\ q(0) = 0 \end{cases}.$$

Utilizando as técnicas de coeficientes constantes para solução homogênea e como solução particular uma combinação linear entre as funções cosseno e seno (veja a Tabela 2.1), obtemos que a solução deste PVI é dada por

$$q(t) = c_1e^{-\frac{t}{2}} + \frac{10}{17}sen(2t) - \frac{40}{17}cos(2t) + 20, \tag{3.4}$$

em que $c_1 = -\frac{300}{17}$ é obtido por meio da condição inicial do problema.

Exercício 3.1.2 *Como você abordaria algebricamente o problema de determinar os pontos de equilíbrio para o PVI apresentado acima?*

Exercício 3.1.3 *Utilize algum programa de sua preferência e esboce o gráfico da solução $q(t)$ dada pela expressão (3.4). O que você diria sobre a questão de estabilidade de uma solução analítica para este caso particular?*

Observação 3.1.2 *Para o problema apresentado no **Exemplo 3.1.1** consideramos uma série de suposições a fim de simplificar a modelagem. Por exemplo, o modelo parte do pressuposto que a quantidade de água na lagoa é controlada inteiramente pelas taxas de fluxo de entrada e saída, isto é, nenhuma quantia de água é perdida por evaporação ou infiltração no solo, e nenhuma é adquirida pela chuva. Por outro lado, para o produto químico, foi admitido que o mesmo flui para dentro e para fora da lagoa, mas não é absorvido pelos peixes ou outros organismos que vivem na lagoa. Por fim, assumimos que a concentração do produto químico é uniforme em toda a lagoa.*

Exemplo 3.1.2 (Reações químicas cinéticas Boyce and DiPrima (2009)) *Uma reação química cinética tem como objetivo estudar a velocidade e os fatores que influenciam as reações químicas. Reações química de segunda ordem envolvem interações (colisões) de uma molécula de uma substância P com uma molécula de uma substância Q para produzir uma molécula de uma nova substância X. Tal processo é geralmente denotado por*

$$P + Q \longrightarrow X.$$

Considerando que p e q, sendo $p \neq q$, as concentrações iniciais de P e Q, respectivamente, e $x(t)$ a concentração de X no tempo t, temos então que $p - x(t)$ e $q - x(t)$ são as concentrações de P e Q ao longo do tempo t, e a velocidade na qual a reação ocorre é dada pela equação

$$\frac{dx}{dt} = k(p - x)(q - x), \tag{3.5}$$

sendo k uma constante de velocidade positiva.

Observação 3.1.3 *Do ponto de vista da área de Química, é mais comum denotar as concentrações dos reagentes P, Q e X respectivamente por $[P]$, $[Q]$ e $[X]$, ao invés de $(p - x)$, $(q - x)$ e x como apresentado acima. Em outras palavras, o modelo matemático (3.5) é representado com mais frequência por*

$$\frac{d[X]}{dt} = k[P][Q]. \tag{3.6}$$

Exercício 3.1.4 *Escolha valores para as concentrações iniciais p e q, bem como um valor para a constante k. Faça o campo de direções desta EDO e identifique graficamente os pontos de equilíbrio de (3.5).*

Exercício 3.1.5 *Determine os pontos de equilíbrio da EDO (3.5) e classifique-os.*

Exercício 3.1.6 *Como ficaria a EDO (3.5) caso as concentrações iniciais dos reagentes fossem iguais? O que poderia ser dito sobre os pontos de equilíbrio?*

Referências

Bassanezi, R.C. and Ferreira, W., 1988. *Equaçoes diferenciais com aplicaçoes*. Harbra.

Boyce, W.E. and DiPrima, R.C., 2009. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons.

Segel, L. and Edelstein-Keshet, L., 2014. *A primer on mathematical models in biology*. Society for Industrial and Applied Mathematic.

Zill, D.G., 2011. *Equações diferenciais. com aplicações em modelagem*. Thomson.

Zill, D.G. and Cullen, M.R., 2000. *Equações diferenciais, vol 1*. Pearson Universidades.

Índice Remissivo