Lista de Exercícios - Ilum Escola de Ciência

Funções de Variáveis Reais e Integrais de Várias Variáveis

---

1 Funções

Exercício 1.1 *Verifique quais das funções abaixo são injetoras:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 2x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 2x + 1$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3 + x$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = e^{2x}$
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = sen(x)$
7. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ln(x)$
8. $f : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{1}{x}$

Exercício 1.2 *Verifique quais das funções dadas no exercício anterior são sobrejetoras.*

Exercício 1.3 *Verifique quais das funções abaixo são contínuas nos seus respectivos pontos.*

1. $$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 - 3x, & x < 0 \end{cases}$$
   em $x = 0$
2. $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ cos(x), & x < 0 \end{cases}$$
   em $x = 0$
3. $$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ sen(x), & x < 0 \end{cases}$$
   em $x = 0$
4. $$f(x) = \begin{cases} ln(x), & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$$
   em $x = 1$

Exercício 1.4 *Considere as duas funções* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x + 1$*. Determine a composição de funções* $f \circ g$ *e* $g \circ f$*.*

2 Derivadas

Exercício 2.1 *Calcule a derivada das seguintes funções:*

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$
2. $f(x) = sen(x) + e^{2x}$
3. $f(x) = cos(x^2 - 2)$
4. $f(x) = ln(\sqrt{x})$
5. $f(x) = \frac{x^2}{e^{-x}}$
6. $f(x) = sen(x)cos(x)$
7. $f(x) = e^x(cos(x) + 2sen(x))$

Exercício 2.2 *Calcule o polinômio de Taylor de ordem 2 de cada função abaixo no seu respectivo ponto.*

1. $f(x) = e^x$ *para* $x = 0$
2. $f(x) = ln(x)$ *para* $x = 1$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ *para* $x = 0$
4. $f(x) = sen(x)$ *para* $x = 0$
5. $f(x) = cos(x)$ *para* $x = 0$
6. $f(x) = e^{-x}cos(x)$ *para* $x = 0$

Exercício 2.3 *Utilize o GeoGebra para plotar as funções do **Exercício 2.2** juntamente com os polinômios de Taylor obtidos e compare as duas funções em torno do ponto fornecido.*

Exercício 2.4 *Determine os pontos de máximos, mínimos e de inflexão das seguintes funções:*

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = -x^2$
3. $f(x) = x^3 - 4x$
4. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$
5. $f(x) = sen(x)$
6. $f(x) = e^{-x}x^2$

Exercício 2.5 *Faça o gráfico da funções que possui **todas** as propriedades abaixo:*

1. $x = 2$ *é um ponto de máximo local*
2. $x = 1$ *e* $x = 3$ *são pontos de mínimo local*
3. $x = 1$ *é um ponto de mínimo global*
4. $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (1, 2) \cup (2, \infty)$
5. $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$

Exercício 2.6 *Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:*

1. $f(x,y) = x^3y - 5x^2 + xy^2$
2. $f(x,y) = sen(xy)$
3. $f(x,y) = cos(x-y) + e^{x+2y}$
4. $f(x,y) = \sqrt{2y} - ln(x)$
5. $f(x,y) = \frac{x^2-y}{e^{-x}}$
6. $f(x,y) = sen(x)cos(y)$
7. $f(x,y) = e^{2y}(cos(x) + 2sen(x))$

Exercício 2.7 *Determine os vetores gradientes das funções, fornecidas no* ***Exercício 2.6****, em um ponto genérico* (x,y).

Exercício 2.8 *Calcule as derivadas direcionais das funções, fornecidas no* ***Exercício 2.6****, na direção* $w = \nabla f(x,y)$. *Qual foi o valor máximo obtido para a derivada direcional em cada caso?*

3 Integrais

Exercício 3.1 *Calcule as seguintes integrais:*

1. $\displaystyle\int x^2 + x - 1dx$
2. $\displaystyle\int dx$
3. $\displaystyle\int sen(2x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 x + 1dx$
5. $\displaystyle\int_0^\pi cos(3x)dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$
7. $\displaystyle\int xe^x dx$
8. $\displaystyle\int_1^2 x^2 ln(x)dx$
9. $\displaystyle\int_1^2 ln(2x)dx$

Exercício 3.2 *Calcule as seguintes integrais duplas:*

1. $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 dxdy$
2. $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 x + ydydx$

3. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} xy^2 dydx$

4. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} xydydx$

5. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1} sen(x^3)dxdy$

Exercício 3.3 *Considere a função* $f(x,y) = 1$. *Calcule a área da região compreendida entre as funções* $y = x$ *e* $y = -x^2 + x + 1$, *com* $-1 \leq x \leq 1$. *Faça um esboço da região de integração.*

Exercício 3.4 *Considere a função* $f(x,y) = y$. *Calcule a integral* $\int\int_B ydxdy$, *em que* B *é dado por* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x+2\}$. *Faça um esboço da região de integração* B.

Exercício 3.5 *Considere a função* $f(x,y) = y$. *Calcule a integral* $\int\int_B ydxdy$, *em que* B *é a região determinada pelas curvas* $y = x$ *e* $y = x^2$, *com* $0 \leq x \leq 2$. *Faça um esboço da região de integração* B.

Exercício 3.6 *Considere a função* $f(x,y) = y$. *Calcule a integral* $\int\int_B ydxdy$, *em que* B *é dado por* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. *Faça um esboço da região de integração* B.

Exercício 3.7 *Considere as mudanças de variáveis u=x-y e v=x+y. A partir disso:*
a) Determine o Jacobiano dessa transformação, isto é,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

b) A partir do Jacobiano encontrado no item anterior, calcule

$$\int\int_B \frac{cos(x-y)}{sen(x+y)}dxdy$$

em que B *é a região dada por*

$$B = \{(x,y) : 1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

c) Faça um esboço da região B *antes e após a mudança de variável sugerida no início do exercício.*