

Lista de Exercícios - Ilum Escola de Ciência

Álgebra Linear

1 Sistemas Lineares

Exercício 1.1 Transforme os sistemas abaixo em sistemas escalonados. Depois, encontre o conjunto de soluções. Escreva a “solução geral” de cada um destes sistemas. Interprete geometricamente. Identifique parâmetros da solução geral e graus de liberdade. Em cada caso onde haja infinitas soluções calcule explicitamente pelo menos duas.

1.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 11 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -7 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 100 \\ x_1 - x_3 = 105 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 211 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_3 = 994 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 1112 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases}$$

2 Vetores

Exercício 2.1 Calcule o produto escalar entre os seguintes vetores:

1. $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 0)$
2. $u = (1, 0)$ e $v = (-2, 5)$
3. $u = (5, 15)$ e $v = (-3, 1)$
4. $u = (3, 7)$ e $v = (-1, 1)$
5. $u = (2, 4)$ e $v = (-6, 3)$
6. $u = (2, 4, -1)$ e $v = (3, 1, 10)$
7. $u = (-1, 0, 2)$ e $v = (0, 1, 0)$
8. $u = (-1, 1, 3)$ e $v = (0, 1, 1)$

Exercício 2.2 Quais dos vetores fornecidos no **Exercício 2.1** são ortogonais?

Exercício 2.3 Calcule o tamanho dos vetores abaixo e determine quais deles são unitários:

1. $u = (1, 2)$
2. $u = (1, 0)$
3. $u = (2, 15)$
4. $u = (0, -1)$
5. $u = (0, 0)$
6. $u = (0, 1, -1)$
7. $u = (-1, 0, 2)$
8. $u = (-1, 1, 3)$

Exercício 2.4 Verifique quais dos vetores abaixo são L.I ou L.D:

1. $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 0)$
2. $u = (1, 0)$ e $v = (-2, 5)$
3. $u = (2, 3)$ e $v = (4, 6)$
4. $u = (2, 3)$, $v = (4, 6)$ e $w = (-2, -3)$
5. $u = (1, -3)$, $v = (2, 0)$ e $w = (3, 1)$
6. $u = (2, 4, -1)$ e $v = (3, 1, 2)$
7. $u = (-1, 0, 2)$ e $v = (0, 1, 0)$
8. $u = (-1, 1, 3)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 0, 1)$
9. $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 0, 1)$ e $w = (1, 5, 1)$
10. $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 3, 1)$ e $w = (2, 3, 1)$
11. $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 1)$ e $w = (5, 8, 3)$

Exercício 2.5 Quais dos vetores dados no **Exercício 2.4** formam uma base para o espaço vetorial \mathbb{R}^2 ? Quais formam uma base para o espaço vetorial \mathbb{R}^3 ?

3 Transformações lineares

Exercício 3.1 Verifique quais das aplicações abaixo são transformações lineares.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x - 3y$
4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, 0)$
5. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (2x - y, 1)$
6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$
7. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (y, 0, 2x)$
8. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (xy, x - y, x + y)$
9. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x, y)$
10. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x, y - z)$
11. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + z, y)$
12. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (xyz, 0)$
13. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x, y, -z)$

Exercício 3.2 Quais das funções dadas no **Exercício 3.1** são operadores lineares?

Exercício 3.3 Quais das funções dadas no **Exercício 3.1** são transformações lineares injetoras?

Exercício 3.4 Quais das funções dadas no **Exercício 3.1** são transformações lineares sobrejetoras?

Exercício 3.5 Quais das funções dadas no **Exercício 3.1** são isomorfismos?

Exercício 3.6 Determine os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes:

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercício 3.7 *Determine os autovalores e os autovetores dos seguintes operadores lineares:*

1. $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$

2. $T(x, y) = (y, 2y)$

3. $T(x, y) = (2y, x)$

4. $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

5. $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$