Lista de Exercícios - Geometria Diferencial - Matemática

1 Superfícies Regulares

Exercício 1.1. *Verifique se as aplicações abaixo são superfícies regulares. Descreva também o traço dessas aplicações.*

1. $X(u,v) = (0,u,v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
2. $X(u,v) = (u+v, 2(u+v), u), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
3. $X(u,v) = (cos(u), 2sen(u), v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 1.2. *Seja* $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ *uma curva regular. Defina a aplicação dada por* $X(u,t) = \alpha(t) + u\alpha'(t)$, *com* $u \in (0,\infty)$. *A aplicação* X *é uma superfície regular?*

Exercício 1.3. *Seja* $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ *uma curva regular tal que* f *é não nula. Verifique que a aplicação*

$$X(u,v) = (f(u)cos(v), f(u)sen(v), g(u) + av),$$

é uma superfície regular. Determine as curvas coordenadas de X *e descreva a superfície no caso em que* g *é constante.*

Exercício 1.4. *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uma aplicação diferenciável. Considere o conjunto* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = c\}$. *Mostre que existe* p_0 *e uma vizinhança contendo* p_0 *tal que* $grad(F(p))$ *é normal a superfície obtida por* S, *para todo* p *nessa vizinhança.*

Exercício 1.5. *Determine a imagem da aplicação normal de Gauss das seguintes superfícies:*

1. $X(u,v) = (usen(a)cos(v), usen(a)sen(v), ucos(a)), \quad \forall v \in \mathbb{R}$, $u > 0$ *e* $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
2. $X(u,v) = (acos(u), asen(u), v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ *e* $a > 0$.

Exercício 1.6. *Uma superfície regular* X *é dita simples se for injetora. Verifique se as aplicações abaixo são simples.*

1. $X(u,v) = (u+v, 2(u+v), u), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
2. $X(u,v) = (cos(u), 2sen(u), v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 1.7. *Duas superfícies simples são ditas isométricas se seus coeficientes da primeira forma quadrática coincidem. Verifique se as aplicações abaixo são isométricas.*

$$X(u,v) = (u,v,0) \quad e \quad Y(u,v) = (cos(u), 2sen(u), v), \quad \forall v \in \mathbb{R}, \quad 0 < u < 2\pi.$$

Exercício 1.8. *Sejam* X *e* Y *superfícies simples. Mostre que* X *e* Y *são isométricas se, e somente se, a aplicação* $\psi = Y \circ X^{-1}$ *preserva comprimento de curva.*

Exercício 1.9. *Considere a superfície*

$$X(u,v) = (vcos(u), vsen(u), v)$$

e a curva $\alpha(t) = X(\sqrt{2}t, e^t)$. *Obtenha as coordenadas de* $\alpha'(t)$ *na base* X_u *e* X_v. *Prove que* $\alpha'(t)$ *bissecta o ângulo formado por* X_u *e* X_v.

Exercício 1.10. *Calcule a área do elipsóide* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Exercício 1.11. *Obtenha a segunda forma quadrática e a função curvatura normal das seguintes superfícies:*

1. $X(u,v) = (f(u)cos(v), f(u)sen(v), g(u))$.
2. $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

Exercício 1.12. *Considere a superfície* $X(u,v) = (f(u), g(u), v)$, *sendo* $\alpha(t) = (f(u), g(u), 0)$ *uma curva regular. Mostre que para cada* $q = (u,v)$, *existe uma direção* w, *tangente a* X *em* q, *tal que a curvatura normal se anula.*

Exercício 1.13. *Mostre que*

1. *A curvatura Gaussiana de um hiperbolóide de uma folha é negativa.*
2. *A catenóide é uma superfície mínima.*

Exercício 1.14. *Obtenha a curvatura Gaussiana e Média de um elipsóide.*

Exercício 1.15. *Considere a superfície*

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v)),$$

que descreve o gráfico de uma função diferenciável $f(u,v)$. Responda:

1. *Obtenha $K(u,v)$ e $H(u,v)$.*
2. *Prove que X tem curvatura Gaussiana identicamente nula se, e somente se, $f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 = 0$.*
3. *Prove que X é uma superfície mínima se, e somente se, $(1+f_u^2)f_{vv} + (1+f_v^2)f_{uu} - 2f_uf_vf_{uv} = 0$.*

Exercício 1.16. *Determine as superfícies de rotação que tem curvatura Gaussiana constante.*

Exercício 1.17. *Mostre que*

1. *Se X é uma superfície de curvatura Gaussiana $K < 0$, então X não possui pontos umbílicos.*
2. *Os pontos umbílicos de uma superfície mínima são planares.*
3. *O toro possui pontos elíticos hiperbólicos e parabólicos.*

Exercício 1.18. *Determine as superfícies de rotação que tem curvatura Gaussiana constante.*

Exercício 1.19. *Verifique que todos os pontos da superfície $X(u,v) = (ucos(v), usen(v), f(v))$, onde f é uma função diferenciável, estritamente monótona, são hiperbólicos.*

Exercício 1.20. *Verifique que as curvas coordenadas de uma superfície são linhas assintóticas se, e só se, $e = g = 0$.*

Exercício 1.21. *Obtenha as linhas assintóticas de um hiperbolóide de uma folha.*