Lista de Exercícios - Geometria Diferencial - Matemática

1 Curvas Planas

Exercício 1.1. *Seja a curva parametrizada diferenciável α, chamada de cardióide, dada por*

$$\alpha(t) = (cost(2cost - 1), sent(2cost - 1)).$$

Determine:

1. *O traço da curva α.*
2. *O vetor tangente t em $r \in (a, b)$.*
3. *O vetor normal n em $r \in (a, b)$.*
4. *A curvatura de α.*

Exercício 1.2. *Considere a elipse α dada por*

$$\alpha(t) = (acost, bsent),$$

em que $a, b > 0$. Para qual valor de t a curvatura de α é máxima? Para qual valor de α a curvatura de t é mínima? Determine a evoluta da elipse.

Exercício 1.3. *Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e sejam n e k o vetor normal e a curvatura, respectivamente. Considere a família de curvas:*

$$\beta(t, r) = \alpha(t) + rn(t), \qquad -\epsilon \leq r \leq \epsilon.$$

Mostre que

1. *$\beta(s, r_0)$ e $\beta(s_0, r)$, sendo r_0 e s_0 constantes, são curvas regulares para ϵ suficientemente pequeno.*
2. *$\beta(s, r_0)$ e $\beta(s_0, r)$ são ortogonais.*
3. *a curvatura de $\beta(s, r_0)$ é igual a $k(t) = \frac{k}{1 - r_0 k}$*

Exercício 1.4. *Seja $\alpha(t) = (e^t cos(t), e^t sen(t))$ a espiral logarítmica. Mostre que a curvatura de α é dada por $k(t) = \frac{1}{at+b}$, com $a \neq 0$.*

Exercício 1.5. *Determine as curvas regulares do plano cujas retas tangentes se interceptam em um ponto fixo.*

Exercício 1.6. *Determine as curvas regulares do plano cujas retas normais se interceptam em um ponto fixo.*

2 Curvas Espaciais

Exercício 2.1. *Obtenha a curva regular tal que $\alpha(0) = (2, 3, 1)$ e $\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$.*

Exercício 2.2. *Forneça a equação da reta tangente à curva $\alpha(t) = (2t^2 + 1, t - 1, 3t^3)$ em $t_0 \in \mathbb{R}$, em que $\alpha(t_0)$ é o ponto de interseção do traço da curva com o plano xz.*

Exercício 2.3. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e somente se, $\alpha''(t)$ e $\alpha'(t)$ são ortogonais, para todo $t \in I$.*

Exercício 2.4. *Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:*

1. $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.
2. $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), e^t)$.
3. $\alpha(t) = (t, cosh(t), senh(t))$, *em que cosh e senh são o cosseno e seno hiperbólicos, respectivamente.*

Exercício 2.5. *Seja $\alpha(t)$ uma curva regular, com $t \in I$.*

1. *Verifique que $\alpha''(t)$ é paralelo ao plano osculador de α em t.*
2. *Mostre que o plano osculador de α em t_0 é dado pelos pontos P tal que $< P - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) >= 0$.*
3. *Obtenha o plano osculador da curva α em $t = 1$, sendo*

$$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$

Exercício 2.6. *Seja α uma curva regular, de curvatura não nula. Então, α é uma curva plana se, e somente se, a torção é nula em todos os pontos.*

Exercício 2.7. *Seja α uma curva regular. Então, o traço de α está contido em uma circunferência de raio $a > 0$ se, e somente se, a torção é nula em todos os pontos e a curvatura é igual a $\frac{1}{a}$.*

3 Isometrias

Exercício 3.1. *Prove que toda isometria F de $\mathbb{R}^3$ possui inversa F^{-1} que também é uma isometria.*

Exercício 3.2. *Verifique se as funções abaixo são isometrias. Em caso afirmativo, descreva a composição da translação pela transformações ortogonal que dá origem a isometria fornecida.*

1. $F(x, y, z) = (x, y, z)$.
2. $F(x, y, z) = (2 - y, z - 3, x + 1)$.

Exercício 3.3. *Verifique que*

1. *toda translação preserva orientação.*
2. *a isometria $F(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ inverte orientação.*