Aula de exercícios

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP.

https://viniciuswasques.github.io/home/

email: viniciuswasques@gmail.com

Exercício complementar: Classifique a cônica descrita pela seguinte função:

$$g(x, y) = 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28$$

Temos que $a = 7$, $b = 6$, $c = -1$, $d = 28$, $e = 12$ e $f = 28$.

Veja que $b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(7)(-1) = 36 + 28 = 64 > 0$. Portanto, a cônica é do tipo hiperbólico. Assim, temos que a cônica é uma hipérbole ou a união de duas retas concorrentes.

1) Vamos primeiro aplicar a translação para poder eliminar os termos lineares, isto é, os termos que acompanham x e y.

Para isso, considere a seguinte translação:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$$

Substituindo, na equação da cônica, obtemos:

$$7(h + u)^2 + 6(h + u)(k + v) - (k + v)^2 + 28(h + u) + 12(k + v) + 28 = 0$$

$$7(h^2+2hu+u^2)+6(hk+hv+uk+uv)-(k^2+2kv+v^2)+28(h+u)+12(k+v)+28 = 0$$

Recomendação: Isolar os termos u^2, v^2 e uv.

$$7u^2+6uv-v^2+7(h^2+2hu)+6(hk+hv+uk)-(k^2+2kv)+28(h+u)+12(k+v)+28=0$$

Próximo passo: Colocar os termos u e v em evidência.

$$7u^2+6uv-v^2+u(14h+6k+28)+v(6h-2k+12)+7h^2+6hk-k^2+28h+12k+28=0$$

Note que podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$7u^2+6uv-v^2+u(14h+6k+28)+v(6h-2k+12)+g(h,k)=0$$

Para eliminar os termos lineares, isto é, os coeficientes que acompanham u e v, devemos ter:

$$\begin{cases} 14h+6k+28=0 \\ 6h-2k+12=0 \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} 14h+6k=-28 \\ 6h-2k=-12 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3, e somando com a primeira, obtemos:

$$32h=-64 \quad \Rightarrow \quad h=-2$$

e portanto, $k=0$. Obtemos então o seguinte:

$$7u^2+6uv-v^2+g(-2,0)=0$$

Como $g(-2,0)=0$, temos

$$7u^2+6uv-v^2=0$$

2) Rotação: Objetivo é eliminar o termo misto.

Para isso, calculemos o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (7-\lambda)(-1-\lambda)-9=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + \lambda - 7 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

Cujas raizes são $\lambda = 8$ e $\lambda = -2$.

Como na equação original temos $a = 7 \neq -1 = c$, então:

$$tg(2\theta) = \frac{6}{7-(-1)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$$

Isso significa que 2θ pertence ao primeiro ou terceiro quadrante. Vamos considerar o caso em que 2θ pertence ao primeiro quadrante (o caso no terceiro quadrante é similar). Assim,

$$cos(2\theta) = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} = \frac{7-(-1)}{\bar{a}-\bar{c}} = \frac{8}{\bar{a}-\bar{c}}$$

Como 2θ pertence ao primeiro quadrante, então $cos(2\theta) > 0$ e assim, concluímos que $\bar{a} - \bar{c} > 0$, isto é, $\bar{a} > \bar{c}$. Portanto, $\bar{a} = 8$ e $\bar{c} = -2$. Assim, a cônica reduzida fica:

$$8t^2 - 2w^2 = 0$$

Note que essa cônica não é uma hipérbole, pois está igualadad a zero.

Dessa forma, nossa única opção é que a cônica seja uma união de retas concorrentes, uma vez que a cônica é do tipo hiperbólica.

Para constatar isso, note que a equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$(4t - 2w)(2t + w) = 0$$

Isso implica que $4t - 2w = 0$ ou $2t + w = 0$. Isolando a variável w, obtemos $w = 2t$ ou $w = -2t$, isto é, duas retas. Note também que em $t = 0$ ambas as retas coincidem. Portanto, a cônica é uma união de retas concorrentes.