Aula de exercícios

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP.

https://viniciuswasques.github.io/home/

email: viniciuswasques@gmail.com

Observação: Para obter a equação geral do plano através do determinante via cofatores é preciso tomar o seguinte cuidado:

Dados um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$, e dois vetores diretores $\vec{u}_1 = (a, b, c)$ e $\vec{u}_2 = (u, v, w)$, calculamos o seguinte determinante a fim de determinar a equação geral do plano.

$$det \begin{pmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = 0$$

Por cofatores, temos o seguinte:

$$det \begin{pmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} det \begin{pmatrix} b & c \\ v & w \end{pmatrix} (x-x_0) + (-1)^{i+j} det \begin{pmatrix} a & c \\ u & w \end{pmatrix} (y-y_0) + (-1)^{i+j} det \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} (z-z_0)$$

em que i representa a linha e j representa a coluna.

Assim,

$$det \begin{pmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} b & c \\ v & w \end{pmatrix} (x-x_0) + (-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} a & c \\ u & w \end{pmatrix} (y-y_0) + (-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} (z-z_0)$$

Logo,

$$det\begin{pmatrix}(x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0)\\ a & b & c\\ u & v & w\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}b & c\\ v & w\end{pmatrix}(x-x_0) - det\begin{pmatrix}a & c\\ u & w\end{pmatrix}(y-y_0) + det\begin{pmatrix}a & b\\ u & v\end{pmatrix}(z-z_0)$$

Portanto,

$$a = det\begin{pmatrix}b & c\\ v & w\end{pmatrix}$$

$$b = -det\begin{pmatrix}a & c\\ u & w\end{pmatrix}$$

$$c = det\begin{pmatrix}a & b\\ u & v\end{pmatrix}$$

Exercício 1.2, lista 5: Duas partículas realizam movimentos descritos pelas equações $X_1 = (0,0,0) + t(1,2,4)$ e $X_2 = (1,0,-2) + s(-1,-1,-1)$. Pode haver colisão? Em qual instante de tempo?

1) Primeiro, vamos verificar se as retas X_1 e X_2 são concorrentes.

Sejam então X_1 e X_2 na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -s \\ z = -2 - s \end{cases}$$

Igualando as respectivas coordenadas, obtemos:

$$\begin{cases} t = 1 - s \\ 2t = -s \\ 4t = -2 - s \end{cases}$$

Equivalentemente, temos:

$$\begin{cases} t + s = 1 \\ 2t + s = 0 \\ 4t + s = -2 \end{cases}$$

Analisando as duas primeiras equações, temos:

$$\begin{cases} t + s = 1 \\ 2t + s = 0 \end{cases}$$

Fazendo a segunda equação, menos a primeira obtemos $t = -1$.

Substituindo $t = -1$ na primeira equação, temos que $s = 2$.

Vejamos se o par $(t, s) = (-1, 2)$ satisfaz as três equações simultaneamente.

$$\begin{cases} (-1) + 2 = 1 \\ 2(-1) + (2) = 0 \\ 4(-1) + (2) = -2 \end{cases}$$

Assim, as retas X_1 e X_2 são concorrentes, e o ponto de intersecção é dado por $(-1, -2, -4)$. Para verificar isso, basta substituir $t = -1$ em X_1 e $s = 2$ em X_2.

Como $t < 0$ e portanto não faz sentido com o problema, concluímos que as duas retas X_1 e X_2 não se cruzam a partir de tempo $t > 0$. Logo, não há colisão entre as partículas.

Observação: Caso as duas retas se encontrem em algum ponto, para $t > 0$, é necessário verificar em qual instante de tempo isso ocorre. Isto é, se as retas X_1 e X_2 se cruzam em (x_0, y_0, z_0) é necessário verificar se isso ocorre para $t = s$. Caso contrário, não há colisão.

Exercício 1.3, item b), lista 5: Determine a intersecção da reta $r: \ X = (2,3,1) + \lambda(1,-1,4)$ e o plano $\pi: \ X = (-4,-6,2) + \mu(2,1,3) + \gamma(3,3,2)$.

Primeiro, vamos escrever a reta e o plano em sua forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -4 + 2\mu + 3\gamma \\ y = -6 + \mu + 3\gamma \\ z = 2 + 3\mu + 2\gamma \end{cases}$$

Igualando as respectivas coordenadas, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -4 + 2\mu + 3\gamma = 2 + \lambda \\ -6 + \mu + 3\gamma = 3 - \lambda \\ 2 + 3\mu + 2\gamma = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

Separando as variáveis, obtemos:

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu + 3\gamma = 6 \\ \lambda + \mu + 3\gamma = 9 \\ -4\lambda + 3\mu + 2\gamma = -1 \end{cases}$$

Que é equivalente ao seguinte sistema: (troca da primeira equação pela segunda)

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 3\gamma = 9 \\ -\lambda + 2\mu + 3\gamma = 6 \\ -4\lambda + 3\mu + 2\gamma = -1 \end{cases}$$

Soma da segunda equação com a primeira:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 3\gamma = 9 \\ \quad 3\mu + 6\gamma = 15 \\ -4\lambda + 3\mu + 2\gamma = -1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 4 e somando com a terceira, obtemos:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 3\gamma = 9 \\ \quad 3\mu + 6\gamma = 15 \\ \quad 7\mu + 14\gamma = 35 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação -7 e terceira equação por 3, e somando as duas equações resultantes, chegamos no seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 3\gamma = 9 \\ \quad 3\mu + 6\gamma = 15 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Como $0 = 0$ não fornece nenhuma informação relevante, podemos descartá-la e trabalhar apenas com as duas primeiras, isto é,

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 3\gamma = 9 \\ \quad 3\mu + 6\gamma = 15 \end{cases}$$

Assim, da segunda equação obtemos que

$$\mu = 5 - 2\gamma$$

Substituindo o valor de μ na primeira equação, temos que:

$$\lambda = 9 - (5 - 2\gamma) - 3\gamma$$

$$\Rightarrow \lambda = 4 - \gamma$$

Logo, obtemos um sistema linear *possível e indeterminado*.

Isso significa que a reta está contida no plano, pois existem infinitos valores para λ, μ e γ em que a igualdade ocorre.

Notação: $r \subset \pi$

Exercício 1.4, item a), lista 5: Determine a intersecção entre os planos $\pi_1 : X = (-4,-6,2) + \mu(2,1,3) + \gamma(3,3,2)$ e $\pi_2 : X = (1,0,0) + \mu(1,0,0) + \gamma(0,1,1)$.

Aqui faremos uma segunda abordagem que é dada através da equação geral do plano

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Escrevendo na forma equação geral do plano, obtemos:

$$\pi_1 : \ -x + z = 0 \qquad \text{Equation 1.}$$

e

$$\pi_2 : \ 3x + 2z - 10 = 0 \qquad \text{Equation 2.}$$

Note que os vetores normais $n_1 = (-1,0,1)$ e $n_2 = (3,0,2)$, aos respectivos planos π_1 e π_2, não são proporcionais. Portanto, segue que os planos são concorrentes.

Vamos então determinar a reta obtida desta intersecção.

Da Equation 1. temos que $x = z$. Substituindo o valor de x na Equation 2., obtemos $3z + 2z - 10 = 0$, isto é, $z = 2$.

Como em nosso caso as equações do plano independem da coordenada y, tomamos então $y = \lambda$.

Assim, obtemos o seguinte:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

que é a forma paramétrica da reta:

$$r : \ X = (2,0,2) + \lambda(0,1,0).$$