Aula de exercícios

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP.

https://viniciuswasques.github.io/home/

email: viniciuswasques@gmail.com

Dúvida: Como tratar/escalonar um sistema linear obtido do estudo entre retas e retas?

Considere o seguinte sistema linear obtido igualando as retas:

$$\begin{cases} 3+\lambda = 1+2\mu \\ \lambda = 2-2\mu \\ -1+\lambda = 1-2\mu \end{cases}$$

Deixando os termos λ e μ ao lado esquerdo das equações e números à direita, temos:

$$\begin{cases} -2\mu+\lambda = 1-3 \\ 2\mu+\lambda = 2 \\ 2\mu+\lambda = 1+1 \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{cases} -2\mu+\lambda = -2 \\ 2\mu+\lambda = 2 \\ 2\mu+\lambda = 2 \end{cases}$$

Note que a terceira equação é a mesma que a segunda. Podemos então ignorar uma das duas e seguir com o processo.

$$\begin{cases} -2\mu + \lambda = -2 \\ 2\mu + \lambda = 2 \end{cases}$$

Para solucionar esse sistema basta somar as duas equações, determinando o valor de λ. Em seguida, substitua o valor de λ encontrado em uma das equações acima, a fim de determinar o valor de μ.

Observação: Similarmente, podemos fazer o mesmo raciocínio para determinar a intersecção de retas e planos.

Dúvida: Como as proporções entre os coeficientes dos planos estão relacionados com a posição dos mesmos?

Sejam os seguintes planos

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Analisemos 3 casos:

1) Planos coincidentes: Se a_1, b_1, c_1, d_1 são proporcionais a a_2, b_2, c_2, d_2, então existe um número real $\lambda \in R$ tal que

$$\frac{a_1}{a_2} = \lambda, \quad \frac{b_1}{b_2} = \lambda, \quad \frac{c_1}{c_2} = \lambda, \quad \frac{d_1}{d_2} = \lambda$$

$$\Rightarrow a_1 = \lambda a_2, \quad b_1 = \lambda b_2, \quad c_1 = \lambda c_2, \quad d_1 = \lambda d_2$$

Assim, multiplicando os termos do plano π_2 por λ temos:

$$\lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = \lambda.0$$

$$\lambda a_2x + \lambda b_2y + \lambda c_2z + \lambda d_2 = 0$$

Substituindo as proporções, temos:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

que é o plano π_1.

Isso significa que os planos π_1 e π_2 são coincidentes.

2) Planos paralelos: Se a_1, b_1, c_1 são proporcionais a a_2, b_2, c_2 mas d_1 e d_2 não são, então existe um número real $\lambda \in R$ tal que

$$\frac{a_1}{a_2} = \lambda, \quad \frac{b_1}{b_2} = \lambda, \quad \frac{c_1}{c_2} = \lambda, \quad \frac{d_1}{d_2} \neq \lambda$$

$$\Rightarrow a_1 = \lambda a_2, \quad b_1 = \lambda b_2, \quad c_1 = \lambda c_2, \quad d_1 \neq \lambda d_2$$

Assim, multiplicando os termos do plano π_2 por λ temos:

$$\lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = \lambda.0$$

$$\lambda a_2x + \lambda b_2y + \lambda c_2z + \lambda d_2 = 0$$

Para que os planos π_1 e π_2 tenham pontos em comum é necessário existir (x, y, z) que satisfaz as equações

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\lambda a_2x + \lambda b_2y + \lambda c_2z + \lambda d_2 = 0$$

simultaneamente.

Ou seja, deveríamos ter que

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 = \lambda a_2x + \lambda b_2y + \lambda c_2z + \lambda d_2$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = \lambda a_2x + \lambda b_2y + \lambda c_2z + \lambda d_2$$

Substituindo as proporções, temos:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_1x + b_1y + c_1z + \lambda d_2$$

Anulando os termos comuns, obtemos:

$$d_1 = \lambda d_2$$

o que não ocorre, uma vez que $d_1 \neq \lambda d_2$.

Isso significa que os planos não tem pontos em comum, e portanto, p_1 e p_2 são paralelos.

3) Planos concorrentes: Não havendo nenhuma proporção entre os coeficientes dos planos envolvidos, obtemos a terceira situação, isto é, os planos são concorrentes (a intersecção entre eles resulta em uma reta).