Aula de exercícios

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP.

https://viniciuswasques.github.io/home/

email: viniciuswasques@gmail.com

Lista 3

Exercício 1.1

a) O espaço das matrizes sobre R é um espaço vetorial utilizando a operação da soma.

1. Comutatividade: Sejam A e B duas matrizes quaisquer de ordem $m \times n$. Isto é

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \dots & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & \dots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$A + B = B + A$$

e portanto a operação de soma é comutativa para as matrizes.

2. Associatividade: Sejam A, B e C três matrizes de ordem $m \times n$. Queremos mostrar que
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$
Pois bem, as matrizes são dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Para mostrar a associatividade, podemos argumentar através de dois processos (escolha aquele que for melhor para você).

Primeira forma:

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & \dots & (a_{1n}+b_{1n})+c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})+c_{m1} & \dots & (a_{mn}+b_{mn})+c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & \dots & a_{1n}+(b_{1n}+c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+(b_{m1}+c_{m1}) & \dots & a_{mn}+(b_{mn}+c_{mn}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \dots & b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & \dots & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \right) \\
&= A+(B+C)
\end{aligned}
$$

Segunda forma:

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & \dots & (a_{1n}+b_{1n})+c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})+c_{m1} & \dots & (a_{mn}+b_{mn})+c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1}+c_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A+(B+C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \dots & b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & \dots & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & \dots & a_{1n}+(b_{1n}+c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+(b_{m1}+c_{m1}) & \dots & a_{mn}+(b_{mn}+c_{mn}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1}+c_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, $A+(B+C) = (A+B)+C$

Tentem fazer as demais propriedades

Comentários: O que significa dizer que V é um espaço vetorial sobre K.

V é conjunto que se encontram os elementos que são alvo do nosso estudo.

K é o conjunto dos escalares, ou seja, os números que vamos multiplicar os elementos de V.

Por exemplo, C é um espaço vetorial dos números complexos sobre o números reais R.