Transformações Lineares

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus Rio Claro

27 de julho de 2020

Transformação linear

Sejam dois espaço vetoriais U e V. Uma aplicação $T : U \to V$ é chamado de transformação linear se satisfaz as seguintes propriedades:

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \quad \forall \text{u,v} \in U$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \forall \text{u} \in U \quad \text{e} \quad \forall \alpha \in K$$

Exemplo:

A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x,y) = x - y$$

é uma transformação linear.

1) Sejam $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ elementos quaisquer de $\mathbb{R}^2$.
Assim, $u + v = (a+c, b+d)$ e portanto:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(a+c, b+d) = (a+c) - (b+d) = a + c - b - d \\ &= (a-b) + (c-d) \\ &= T(a,b) + T(c,d) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

2) Sejam $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer.

Assim,

$$\begin{aligned} T(\alpha u) &= T(\alpha(a,b)) = T(\alpha a, \alpha b) = \alpha a - \alpha b \\ &= \alpha(a - b) \\ &= \alpha T(a, b) \\ &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

Aqui focaremos nas transformações lineares em que $U = \mathbb{R}^m$ e $V = \mathbb{R}^n$.

Também direcionamos nosso estudo somente sob o corpo dos números reais, isto é, $K = \mathbb{R}$.

Em particular, quando $U = V$ chamamos $T : U \to U$ de operador linear.

Exemplos

Transformação nula: $T(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Notação: $0(x) = x$;

Transformação identidade: $T(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Notação: $I(x) = x$;

Transformação homotetia: $T(x) = kx$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e um valor de $k > 0$ fixo.

No caso de homotetias, temos o seguinte: Se $0 < k < 1$, então chamamos tal homotetia de contração. Se $k > 1$, então chamamos de dilatação.

Mostre que tais aplicações são transformações lineares.

Exemplo:

Considere a seguinte aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$.

Veja que tal aplicação não é uma transformação linear, uma vez que:

$$T(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 = T(x) + T(y)$$

Propriedades de transformações lineares

As seguintes propriedades são válidas para transformações lineares:

1) $T(0) = 0$

2) $T(-x) = -T(x)$

3) $T(x - y) = T(x) - T(y)$

Verifique tais afirmações

Composição entre transformações lineares

Sejam duas transformações lineares $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$. Então a composição entre T_1 e T_2, denotada por $T_2 \circ T_1 : U \to W$, é definida por:

$$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$$

também é uma transformação linear.

Exemplo:

Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $T_1(x, y, z) = (x - y, x + z)$ e $T_2(u, v) = u + v$.

Assim, a composição $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x, y, z) &= T_2(T_1(x, y, z)) \\ &= T_2((x - y, x + z)) \\ &= (x - y) + (x + z)) \\ &= 2x - y + z \end{aligned}$$

Exemplo: Considere as transformações lineares $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $T_2(x, y) = (y, 2x)$ e $I(u, v) = (u, v)$.

Assim, a composição $T_2 \circ I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} (T_2 \circ I)(x, y) & = & T_2(I(x, y)) \\ & = & T_2(x, y) \end{array}$$

Por outro lado, $I \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} (I \circ T_2)(x, y) & = & I(T_2(x, y)) \\ & = & I(y, 2x) \\ & = & (y, 2x) \\ & = & T_2(x, y) \end{array}$$

Em geral, $T \circ I = I \circ T = T$ para qualquer transformação linear T.

Núcleo e Imagem

O núcleo de uma transformação linear $T : U \to V$ é definido por:

$$Ker(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}$$

A imagem de uma transformação linear $T : U \to V$ é definida por:

$$Im(T) = \{T(u) \in V : \; u \in U\}$$

Exemplo:

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, y)$.

Assim, se $(x, y) \in Ker(T)$, então $T(x, y) = (0, 0)$. Logo, $(x - y, y) = (0, 0)$ e portanto $x = y$ e $y = 0$. Concluímos então que

$$Ker(T) = \{(0, 0)\}$$

Determinemos agora a imagem de T. Como $T(x, y) = (x - y, y)$ então temos que

$$Im(T) = \{(x - y, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Observação:

O núcleo de uma transformação linear é um subespaço de U.

A imagem de uma transformação linear é um subespaço de V.

Isso significa que faz sentido em pensar em uma base para $Ker(T)$ e $Im(T)$.

Exemplo:

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = x - y$.

Assim, se $(x, y) \in Ker(T)$, então $T(x, y) = 0$. Logo, $x - y = 0$ e portanto $x = y$. Concluímos então que

$$Ker(T) = \{(x, x)\}$$

Para determinar uma base para $Ker(T)$ colocamos "o x em evidência", isto é: $(x, x) = x(1, 1)$. Portanto, $\{(1, 1)\}$ é uma base para $Ker(T)$.

Exemplo:

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, y)$.

Como vimos anteriormente,

$$Im(T) = \{(x - y, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Para determinar uma base para $Im(T)$ colocamos "o x e y em evidência", isto é: $(x - y, y) = x(1, 0) + y(-1, 1)$. Portanto, $\{(1, 0), (-1, 1)\}$ é uma base para $Im(T)$.

Propriedades

1) Se $Ker(T) = \{(0,0)\}$, então T é uma transformação linear injetora. (Se $T(u) = T(v)$, então $u = v$).

2) Se a quantidade de elementos na base da $Im(T)$ for igual a a quantidade de elementos na base de V, então T é uma transformação linear sobrejetora. (Dado $v \in V$ existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$.)

3) Para transformações lineares (em dimensões finitas), dizer que T é injetora equivale a dizer T é sobrejetora.

4) Se uma transformação linear é injetora e sobrejetora, chamamos-a de bijetora. E neste caso, existe a transformação inversa T^{-1}.

Transformação linear inversa

A inversa de uma transformação linear bijetora T, denotada por T^{-1}, possui a seguinte propriedade:

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$$

Se T_1 e T_2 são duas transformações lineares injetoras, então

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$$

Exemplo:

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, 3y)$.

Veja que T é injetora, pois:

$$T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x, 3y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Logo, T é bijetora e portanto existe T^{-1}.

Vamos determinar tal transformação.

Exemplo:

T^{-1} deve satisfazer:

$$(T^{-1} \circ T)(x, y) = (x, y)$$

$$(T^{-1}(T(x, y)) = (x, y) \Leftrightarrow T^{-1}(2x, 3y) = (x, y)$$

Assim,

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}\right)$$

Verifique que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$

Isomorfismo

Uma transformação linear $T : U \to V$ é chamada de *isomorfismo* se for bijetora, e sua inversa T^{-1} também for uma transformação linear bijetora.

Exemplo: A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(u, v) = (2u, 2v)$, é um isomorfismo.

Comprove essa afirmação

Matrizes de transformações lineares

É possível associar uma transformação linear com matrizes, através de base de um espaço vetorial.

Uma transformação $T : U \to V$ associa "vetores" de U em "vetores" de V.

Em particular, associa elementos de uma base de U em elementos de uma base de V.

Uma matriz de transformação linear descreve essa associação de uma base em outra.

Sejam $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases para os espaços vetoriais U e V, respectivamente.

Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
T(u_1) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{m1}v_m \\
T(u_2) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{m2}v_m \\
&\vdots \\
T(u_n) &= \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{mn}v_m
\end{aligned}$$

Obs: Veja que as equações acima são possíveis pois $T(u_i)$ é um elemento de V e portanto, pode ser escrito como combinação linear da base, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Os escalares α_{ji} são chamados de coordenadas de u_i com respeito a base V, por meio da transformação T.

Os escalares α_{ji} são os coeficientes do que chamamos ser *matriz de uma transformação linear*.

Isto é,

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação permite escrever qualquer vetor com respeito a base desejada.

Exemplo:

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$. Sejam as bases $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $C = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned} T(1,0,0) = (1,1) &= 1.(1,0) + 1.(0,1) \\ T(0,1,0) = (1,0) &= 1.(1,0) + 0.(0,1) \\ T(0,0,1) = (0,-1) &= 0.(1,0) + (-1).(0,1) \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$. Sejam as bases $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $D = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Assim,

$$
\begin{aligned}
T(1,0,0) = (1,1) &= 1.(1,1) + 0.(0,1) \\
T(0,1,0) = (1,0) &= 1.(1,1) + (-1).(0,1) \\
T(0,0,1) = (0,-1) &= 0.(1,1) + (-1).(0,1)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
[T]_{B,D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Observação

1) Veja que a mesma transformação linear pode ter diferentes matrizes de transformações, quando mudamos as bases:

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \neq [T]_{B,D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2) A matrizes de transformação será quadrada quando o número de elementos da base de U for a mesma que os da base de V.

3) A matriz de transformação de composição entre transformações lineares é dada por $[T_1 \circ T_2]_{B,C} = [T_1]_{B,D} \cdot [T_2]_{D,C}$.

Em particular, quando escrevemos a matriz de transformação linear com respeito a mesma base B, denotamos-a por $[T]_B$.

Exemplo: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, x + y)$. Consideremos a base canônica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Assim,

$$\begin{aligned} T(1,0) = (2,1) &= 2.(1,0) + 1.(0,1) \\ T(0,1) = (0,1) &= 0.(1,0) + 1.(0,1) \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $[T]_B$ é chamada matriz de transformação e $[T]_{B,C}$ é chamada de matriz mudança de bases.

Autovetores e autovalores

O escalar λ é chamado um autovalor associado ao operador linear $T : U \to U$, se existe um vetor não nulo x tal que

$$T(x) = \lambda x$$

o vetor x é chamado de autovetor.

O par $(\lambda; x)$ é chamado de autopar.

Exemplo: O par $(2; (1, 1))$ é um autopar de $T(x, y) = (2x, x + y)$, pois:

$$T(1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1)$$

Como determinar autovalores?

Na forma matricial, temos que $T(x) = \lambda x$ é equivalente a

$$[T]_B x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad [T]_B x - \lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad ([T]_B - \lambda I)x = 0$$

Se $[T]_B - \lambda I$ for uma matriz invertível, isso significará que $x = 0$, que não é o que estamos buscando.

Logo, devemos determinar valores de λ de tal forma que

$$det([T]_B - \lambda I) = 0$$

A expressão $det([T]_B - \lambda I)$ dará origem a um polinômio, que é chamado de *polinômio característico*.

Exemplo:

Vamos determinar os autovalores de $T(x, y) = (2x, x + y)$ com respeito a base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ canônica.

Veja que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_B - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Devemos determinar λ tal que $det([T]_B - \lambda I) = 0$, isto é,

$$det([T]_B - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Obtemos o seguinte polinômio característico

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

cujas raízes são $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$

Estes são os autovalores associados a transformação T.

Vamos agora determinar os autovetores associados a cada autovalor.

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 2-(2) & 0 \\ 1 & 1-(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que dá origem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Portanto, os vetores associados a este autovalor são da forma (x, x). Isto é, o vetor que gera todos os vetores dessa forma é dado por $(1, 1)$.

Logo, $(2, (1, 1))$ é um autopar.

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2-(1) & 0 \\ 1 & 1-(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que dá origem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 0y = 0 \\ x + 0y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Portanto, os vetores associados a este autovalor são da forma $(0, y)$. Isto é, o vetor que gera todos os vetores dessa forma é dado por $(0, 1)$.

Logo, $(1, (0, 1))$ é um autopar.

Observação:

Os autovalores independem da escolha da base B, isto é, os autovalores com respeito a $[T]_B$ são os mesmo que $[T]_C$ para quaisquer que sejam as bases B e C.

Aplicações de autovetores e autovalores

Monitoramento no uso de terras:
http://mtc-m12.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/deise/1999/10.20.17.19/doc/publicacao7181.pdf

Geofísica: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/287723/1/Cavallaro_FranciscodeAssis_M.pdf

Geologia Estrutural: http://www.coc.ufrj.br/en/component/docman/?task=doc_download&gid=726&Itemid=

Análise de componentes principais - coletânea de aplicações:
http://rigeo.cprm.gov.br/jspui/bitstream/doc/501/1/Art_analise_componentes_Andriotti.pdf

Referências

BOULOS, P., CAMARGO, I. Introdução à Geometria Analítica no Espaço, Editora Makron Books, 1997.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H. e COSTA, R.C.F. Álgebra Linear, 5a. edição. São Paulo

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. Álgebra Linear, 2a. edição. São Paulo: Harper & How do Brasil, 1980.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books, 1987.

Contato

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: viniciuswasques@gmail.com

Departamento de Matemática

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`