Elipse, Hipérbole e Parábola

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Campus Rio Claro

20 de julho de 2020

Distância

Definimos a distância entre dois pontos X_1 e X_2 pela função $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(X_1, X_2) = ||X_1 - X_2||$$

Exemplo:

A distância entre $X_1 = (1, 2)$ e $X_2 = (5, -1)$ é

$$\begin{aligned} d(X_1, X_2) &= ||(1,2) - (5,-1)|| \\ &= ||(1-5, 2-(-1))|| \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

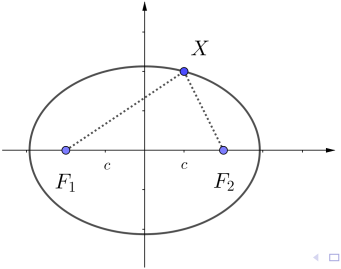
Elipse

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos com distância $2c$ e a um número real tal que $a > c$.

O lugar geométrico E dos pontos X tais que

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

é chamado de *elipse*.



Elipse

- Os pontos F_1 e F_2 são chamados de *foco* da elipse;
- O segmento F_1F_2 é chamado de *segmento focal*;
- O ponto médio do segmento focal é chamado de *centro* da elipse;
- O valor 2c é chamado de distância focal;

Elipse

• Qualquer segmento cujas extremidades pertencem a E é chamado de *corda* da elipse;

• Os pontos A_1 e A_2 em que a reta focal intercepta a elipse, e os pontos B_1 e B_2 em que a mediatriz do segmento focal intercepta a elipse são chamados *vértice*;

• O comprimento de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal é chamado de *amplitude focal*.

Equação da elipse

Sejam dois pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Assim, um pponto $X = (x, y)$ pertence à elipse se, e somente se, $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$.

Portanto,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Isolando o primeiro termo da equação e elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos: (verifique essa passagem)

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando ao quadrado novamente, obtemos:

$$a^2((x-c)^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

que é equivalente a (verifique essa passagem)

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

chamando $b = \sqrt{a^2-c^2}$, temos que $b^2 = a^2 - c^2$ e assim

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo toda equação por a^2b^2, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(Equação da Elipse)}$$

Observação:

No caso em que $a = b = 1$, obtemos uma circunferência de raio 1 e centro $(0, 0)$.

Lembrando que a equação geral de uma circunferência de raio r é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{(Equação da circunferência)}$$

em que $X_0 = (x_0, y_0)$ é o centro da circunferência.

Esta fórmula é obtida fazendo a seguinte relação $d(X, X_0) = r$, isto é, o lugar geométrico em que todos os pontos $X = (x, y)$ distam r do ponto $X_0 = (x_0, y_0)$.

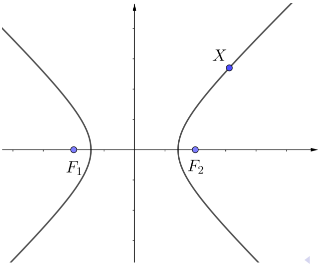
Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos com distância $2c$, e a um número real tal que $0 < a < c$.

O lugar geométrico H dos pontos X tais que

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$$

é chamado de *hipérbole*.



Hipérbole

- Os pontos F_1 e F_2 são chamados de *foco* da hipérbole;

- O segmento F_1F_2 é chamado de *segmento focal*;

- O ponto médio do segmento focal é chamado de *centro* da hipérbole;

- O valor 2c é chamado de *distância focal*;

Hipérbole

• Qualquer segmento cujas extremidades pertencem a H é chamado de *corda* da hipérbole;

• Os pontos A_1 e A_2 em que a reta focal intercepta a hipérbole são chamados de *vértice*;

• O comprimento de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal é chamado de *amplitude focal*.

Equação da hipérbole

Sejam dois pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Assim, um pponto $X = (x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se, $d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a$.

Portanto,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, reagrupando os termos e elevando novamente ao quadrado, obtemos: (verifique essa passagem)

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Chamando $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, temos que $b^2 = c^2 - a^2$ e assim

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

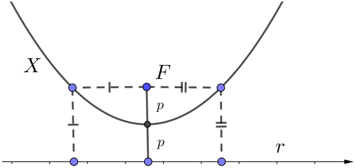
Dividindo toda equação por $a^2 b^2$, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(Equação da Hipérbole)}$$

Parábola

Sejam r uma reta e F um ponto não pertence a ela.

O lugar geométrico P dos pontos equidistantes de F e r é chamado de *parábola*.



Parábola

- O ponto F é chamado de *foco*;
- A reta é chamada de *diretriz*;
- O número positivo p tal que $d(F, r) = 2p$ é chamado de *parâmetro* da parábola;
- A reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz é chamada de *eixo*;
- O ponto F é chamado de *foco*;

Parábola

- A reta é chamada de *diretriz*;

- O número positivo p tal que $d(F, r) = 2p$ é chamado de *parâmetro* da parábola;

- A reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz é chamada de *eixo*;

- Se H é o ponto de intersecção da diretriz com o eixo, então o ponto médio do segmento HF, denotado por V, é chamado de *vértice*.

Sejam $F = (p, 0)$ o foco da parábola e $r : x = -p$ a reta diretriz.

Se $X = (x, y)$, então $d(X, r) = |x + p|$ e
$d(X, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$.

Assim, X pertence a parábola se, e somente se,

$$|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

Elevando ambos lados ao quadrado, temos

$$|x + p|^2 = (x - p)^2 + y^2$$

Equivalentemente, temos:

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

Simplificando,

$$y^2 = 4px \quad \text{(Equação da Parábola)}$$

Cônicas

Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos $X = (x, y)$ que satisfazem uma equação de segundo grau $g(x, y) = 0$, em que

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Cônicas

- Os termos ax^2 e cy^2 são chamados de *termos quadráticos*;
- O termo bxy é chamado de termo *quadrático misto*;
- Os termos dx e ey são chamados de lineares;
- O termo f é chamado de independente.

Exemplo:

- Conjunto vazio $A = \emptyset$:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

- Conjunto formado por um único ponto $A = \{(1, 0)\}$:

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 + y^2 = 0$$

- Reta $r : y = -x$:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 0$$

Exemplo:

- Elipse :

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

- Hipérbole:

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

- Parábola:

$$x - y^2 = 0$$

Proposição: Um subconjunto de π é uma cônica se, e somente se:

- é o conjunto vazio ou
- é um ponto ou
- é uma reta (ou reuniões de retas) ou
- é uma circunferência ou
- é uma elípse ou
- é uma hipérbole ou
- é uma parábola.

Translação e rotação

O ponto $X = (x, y)$ é uma translação de $P = (h, k)$, por $U = (u, v)$ se

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$$

O ponto $X = (x, y)$ é uma rotação de $U = (u, v)$ pelo ângulo θ, se

$$\begin{cases} x = ucos(\theta) - vsen(\theta) \\ y = usen(\theta) + vcos(\theta) \end{cases}$$

Aplicação das translações e rotações

Objetivo: Simplificar a equação que dá origem as cônicas.

1) Eliminar os termos de 1º grau por translação:

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad + \quad dx + ey + f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{a}u^2 + \bar{b}uv \quad + \quad \bar{c}v^2 + \bar{f} = 0$$

Através da translação $x = h + u$ e $y = k + v$, obtemos

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g(h+u, k+v) \\ &= au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u \\ &+ (bh + 2ck + e)v + ah^2 + bhk + ck^2 \\ &+ dh + ek + f \end{aligned}$$

Observação:

Veja que podemos reescrever a equação

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g(h+u,k+v) \\ &= au^2+buv+cv^2+(2ah+bk+d)u \\ &+ (bh+2ck+e)v+ah^2+bhk+ck^2 \\ &+ dh+ek+f \end{aligned}$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g'(u,v) &= g(h+u,k+v) \\ &= au^2+buv+cv^2+(2ah+bk+d)u+(bh+2ck+e)v+g(h,k) \end{aligned}$$

em que $g(h,k)=ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f$.

Devemos agora determinar h e k de modo que

$$\begin{cases} bk + 2ah + d = 0 \\ 2ck + bh + e = 0 \end{cases}$$

Esse sistema linear esta associado com a seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}$$

cuja solução depende do determinante da primeira matriz, isto é, $b^2 - 4ac$.

2) Eliminar os termos mistos de 2º grau por rotação:

$$
\begin{array}{ccc}
ax^2 + bxy + cy^2 & + & dx + ey + f = 0 \\
 & \Downarrow & \\
\bar{a}u^2 + \bar{c}v^2 & + & \bar{d}u + \bar{e}v + \bar{f} = 0
\end{array}
$$

Fazendo a substituição

$$\begin{cases} x = ucos(\theta) - vsen(\theta) \\ y = usen(\theta) + vcos(\theta) \end{cases}$$

obtemos:

$$\bar{a}u^2 + \bar{b}uv + \bar{c}v^2 + \bar{d}u + \bar{e}v + \bar{f} = 0$$

em que

$\bar{a} = acos^2(\theta) + \frac{b}{2}sen(2\theta) + csen^2(\theta)$

$\bar{b} = (c - a)sen(2\theta) + bcos(2\theta)$

$\bar{c} = asen^2(\theta) - \frac{b}{2}sen(2\theta) + ccos^2(\theta)$

$\bar{d} = dcos(\theta) + esen(\theta)$

$\bar{e} = ecos(\theta) - dsen(\theta)$

$\bar{f} = f$

(Verifique essa substituição)

Devemos agora determinar $\bar{b} = 0$, isto é,

$$(c-a)sen(2\theta) + bcos(2\theta) = 0$$

Se $a = c$, então $cos(2\theta) = 0$ implicando que $\theta = \frac{\pi}{4}$. (Determine os valores de $\bar{a}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$ para esse caso.)

Se $a \neq c$, então

$$tg(2\theta) = \frac{b}{a-c}$$

Observação:

Podemos obter os valores $\bar{a}$ e $\bar{c}$ através das raízes do polinômio de segundo grau (em função de λ) obtido por

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

A escolha das raízes para cada um desses valores depende da escolha de θ, que está vinculada a equação

$$cos(2\theta) = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}}$$

Classificação de cônicas

1) Procure eliminar por meio de uma translação os termos de 1º grau.

2) Admitindo que isso possa ser feito, procure eliminar o termo em *uv* através de uma rotação.

3) Chega-se a uma equação da forma

$$\bar{a}t^2 + \bar{c}w^2 + \bar{f} = 0$$

que é de mais fácil reconhecimento.

Observação: Pode acontecer de não conseguirmos eliminar o termo de 1º pela translação. Nesse caso, efetuamos apenas a rotação.

• Se $b^2 - 4ac < 0$, então a cônica pode ser: *vazio, ponto, circunferência* ou *elipse* (tipo elíptico);

• Se $b^2 - 4ac = 0$, então a cônica pode ser: *reta, união de retas paralelas, parábola* ou *vazio* (tipo parabólico);

• Se $b^2 - 4ac > 0$, então a cônica pode ser: *duas retas concorrentes* ou *hipérbole* (tipo hiperbólico).

Exemplo:

Classifique a cônica

$$g(x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

Exemplo:

Classifique a cônica

$$g(x,y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

Primeiro veja que $b^2 - 4ac = 16 - 4.4.7 < 0$ o que significa que é do tipo elíptico.

Por meio da translação $x = u + h$ e $y = v + k$, obtemos

$$4u^2 + 4uv + 7v^2 + (8h - 4k + 12)u + (-4h + 14k + 6)v + g(h,k) = 0$$

Igualando os coeficientes u e v a 0, temos:

$$\begin{cases} 8h - 4k = -12 \\ -4h + 14k = -6 \end{cases}$$

e resolvendo o sistema temos $h = -2$ e $k = -1$.
Obtemos a nova equação:

$$4u^2 - 4uv + 7v^2 - 24 = 0$$

Vamos eliminar agora o termo uv. Através da rotação, obtemos

$$tg(2\theta) = \frac{4}{3}$$

assim, tomamos 2θ no primeiro quadrante.

Calculando $\bar{a}$ e $\bar{c}$ através das raízes do polinômio associado a

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

encontramos $\lambda = 3$ e $\lambda = 8$.

Como

$$cos(2\theta) = \frac{-3}{\bar{a} - \bar{c}}$$

e $cos(2\theta) > 0$, para 2θ no primeiro quadrante, então $\bar{a} < \bar{c}$.

Logo, $\bar{a} = 3$ e $\bar{c} = 8$.

Portanto, a euqação obtida fica $3t^2 + 8w^2 - 24 = 0$, isto é, (Verifique)

$$\frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$

que é uma elipse.

Referências

BOULOS, P., CAMARGO, I. Introdução à Geometria Analítica no Espaço, Editora Makron Books, 1997.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H. e COSTA, R.C.F. Álgebra Linear, 5a. edição. São Paulo

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. Álgebra Linear, 2a. edição. São Paulo: Harper & How do Brasil, 1980.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books, 1987.

Contato

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: viniciuswasques@gmail.com

Departamento de Matemática

site: https://viniciuswasques.github.io/home/