Estudo de posições de retas e planos

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus Rio Claro

13 de julho de 2020

Estudo de retas

Dadas duas retas, r e s no mesmo plano, podemos ter as seguintes situações:

• r e s são paralelas (nenhum ponto em comum);

• r e s são coincidentes (infinitos pontos em comum);

• r e s são concorrentes (se encontram em um único ponto).

• Se as retas estão no espaço, então podemos ter um quarto caso que é chamado de retas *reversas*, isto é, elas se encontram em planos distintos.

Retas concorrentes

Para determinar o ponto de intersecção entre duas retas fazemos o seguinte:

1) Escrevemos as duas equações das retas nas formas paramétricas **utilizando diferentes parâmetros**;

2) Igualamos as duas equações e determinamos os valores dos parâmetros;

3) Substituimos os valores dos parâmetros nas equações para obter o valor do ponto que se encontra na intersecção.

Exemplo:

Determine a intersecção das retas

$$r : X = (3, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1)$$

$$s : X = (1, 2, 1) + \mu(2, -2, -2)$$

Exemplo:

Determine a intersecção das retas

$$r : X = (3, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1)$$

$$s : X = (1, 2, 1) + \mu(2, -2, -2)$$

Escrevendo ambas as equações na forma paramétrica, temos:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$$

Igualando os termos, obtemos:

$$\begin{cases} 3+\lambda = 1+2\mu \\ \lambda = 2-2\mu \\ -1+\lambda = 1-2\mu \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima nas variáveis λ e μ, temos que $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ (verifique essa afirmação).

Substituindo na equação da reta em sua forma vetorial, obtemos:

$$r : X = (3, 0, -1) + 0(1, 1, 1) = (3, 0, -1)$$

$$s : X = (1, 2, 1) + 1(2, -2, -2) = (3, 0, -1)$$

Observação

É importante utilizar parâmetros diferentes nas equações da reta.

Utilize o mesmo parâmetro nas equações da reta r e s dadas no exemplo anterior. Você chegará em um sistema impossível o que não é compatível com o problema.

Concluir que o sistema obtido não possui solução é equivalente a dizer que as retas não se cruzam, ou seja, que são paralelas.

Concluir que o sistema obtido possui única solução é equivalente a dizer que as retas se cruzam em um único ponto.

Concluir que o sistema obtido possui infinitas soluções é equivalente a dizer que as retas são coincidentes.

Dadas uma reta r e um plano π, podemos ter as seguintes situações:

- r está contido no plano π;
- r e π são paralelos;
- r e π são transversais (apenas um ponto em comum).

Para determinar o ponto de intersecção entre retas e planos podemos fazer o mesmo processo que o caso entre duas retas.

Alternativamente, podemos determinar esse ponto fazendo o seguinte:

1) Escrevemos a equação do plano na forma geral;

2) Substituimos os valores de x, y e z na equação geral do plano e determinamos o parâmetro λ;

3) Substituimos o valor do parâmetro λ na equação da reta para determinar o ponto.

Exemplo:

Determine a intersecção da reta r e o plano π.

$$r : X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$$

$$\pi : x + y + z = 20$$

Exemplo:

Determine a intersecção da reta r e o plano π.

$$r : X = (1,0,1) + \lambda(2,1,3)$$

$$\pi : x + y + z = 20$$

Escrevendo a equação da reta na forma paramétrica, temos:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Exemplo:

Substituindo na equação geral do plano, temos:

$$(1+2\lambda)+\lambda+(1+3\lambda)=20 \quad \Rightarrow \quad 6\lambda+2=20$$

Portanto, $\lambda = 3$ e assim o ponto de intersecção é $(7, 3, 10)$

Estudo entre planos

Dados dois planos π_1 e π_2, podemos ter as seguintes situações:

- Os planos são coincidentes;
- Os planos são paralelos;
- Os planos são transversais.

Dados dois planos

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Então temos o seguinte:

1) Se a_1, b_1, c_1 e d_1 forem proporcionais a a_2, b_2, c_2 e d_2, isto é, existir um número λ tal que

$$a_1 = \lambda a_2 \quad b_1 = \lambda b_2 \quad c_1 = \lambda c_2 \quad d_1 = \lambda d_2$$

então os planos são coincidentes.

2) Se apenas a_1, b_1, c_1 forem proporcionais a a_2, b_2, c_2, isto é, existir um número λ tal que

$$a_1 = \lambda a_2 \quad b_1 = \lambda b_2 \quad c_1 = \lambda c_2 \quad d_1 \neq \lambda d_2$$

então os planos são paralelos.

3) Se a_1, b_1, c_1 não forem proporcionais a a_2, b_2, c_2, então os planos são concorrentes.

Exemplo:

Seja o plano $\pi_1 : x + 2y - 3z + 5 = 0$. Então:

a) o plano $\pi_2 : 2x + 4y - 6z + 10 = 0$ é coincidente com π_1;

b) o plano $\pi_3 : 2x + 4y - 6z + 4 = 0$ é paralelo com π_1;

c) o plano $\pi_4 : 2x + y + 3z + 1 = 0$ é concorrente com π_1;

Intersecção entre planos

Dados dois planos

$$\pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\pi_2 : x - y + 2z = 0 \quad (2)$$

Isolando x na equação (2), temos

$$x = y - 2z \quad (3)$$

Substituindo na equação (1), temos $(y - 2z) + 2y + 3z - 1 = 0$. Assim, obtemos:

$$z = 1 - 3y \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3), temos:

$$x = y - 2(1 - 3y) = -2 + 7y$$

Dessa forma, escrevemos ambas as variáveis x e z em função de y. Assim, chamando $y = \lambda$ obtemos:

$$\begin{cases} x = -2 + 7\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

que é a equação paramétrica da reta:

$$X = (-2, 0, 1) + \lambda(7, 1, -3)$$

Intersecção entre planos

Resumindo, para determinar a intersecção entre dois planos, escrevemos duas variáveis em função de uma e escrevemos a reta na forma paramétrica.

Para isso, isolamos uma variável de um plano e substituímos na variável correspondente do outro plano. E repetimos o processo do slide anterior.

Referências

BOULOS, P., CAMARGO, I. Introdução à Geometria Analítica no Espaço, Editora Makron Books, 1997.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H. e COSTA, R.C.F. Álgebra Linear, 5a. edição. São Paulo

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. Álgebra Linear, 2a. edição. São Paulo: Harper & How do Brasil, 1980.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books, 1987.

Contato

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: viniciuswasques@gmail.com

Departamento de Matemática

site: https://viniciuswasques.github.io/home/