Espaços e Subespaços vetoriais

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus Rio Claro

29 de junho de 2020

Espaço Vetorial

Um espaço vetorial V, sobre um corpo $\mathbb{K}$, é um conjunto que satisfaz as seguintes propriedades:

1) Comutatividade $(a+b = b+a)$;

2) Associatividade $((a+b)+c = a+(b+c))$;

3) Possui elemento neutro $(0+a = a+0 = a)$;

4) Possui elemento oposto $(0+a = a+0 = a)$;

5) Distributividade (α(a+b) $= \alpha$a+αb);

6) Distributividade (($\alpha + \beta$)a $= \alpha$a+βa);

7) Associativa (($\alpha\beta$)a $= \alpha$(βa);

8) Possui elemento identidade (1.a $=$ a.1 $=$ a);

Exemplo:

Conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Conjunto dos números reais $\mathbb{R}^2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Conjunto dos números reais $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Subespaço Vetorial

Dizemos que um subconjunto U de um espaço vetorial V é um *subespaço vetorial* se as seguintes propriedades são válidas:

a) U possui elemento neutro;

b) U possui elemento oposto;

c) Se u e v pertencem a U, então $u + v$ pertence a U.

Todo subespaço vetorial é um espaço vetorial.

Exemplo:

O conjunto das matrizes simétricas ($A^t = A$) é um subespaço vetorial;

O conjunto das matrizes anti-simétricas ($-A^t = A$) é um subespaço vetorial;

O conjunto das funções pares $f(x) = f(-x)$ é um subespaço vetorial;

O conjunto das funções ímpares $f(-x) = -f(x)$ é um subespaço vetorial.

Argumente sobre essas afirmações.

A partir daqui, quando falarmos: *"Uma base para o espaço"* estamos nos referindo a um espaço vetorial.

Assim, dizer "uma base para um plano" é equivalente a dizer uma base para $\mathbb{R}^2$.

Além disso, vamos dizer "uma base para um espaço" para nos referir o espaço vetorial dado por $\mathbb{R}^3$.

Produto escalar

O produto escalar (ou também chamado de produto interno) é uma operação definida da seguinte forma:

$$\langle (a, b, c), (u, v, w) \rangle = au + bv + cw$$

Veja que o produto escalar associa um par de vetores a um número.

Exemplo:

a) Calcule o produto escalar entre (1,2,3) e (-4,5,0).

$$\langle(1,2,3),(-4,5,0)\rangle = 1.(-4) + 2.5 + 3.0 = 6$$

b) Calcule o produto escalar entre (1,2) e (-1,0).

$$\langle(1,2),(-1,0)\rangle = 1.(-1) + 2.0 = -1$$

Propriedades

Essa operação tem as seguintes propriedades:

a)$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, mais precisamente, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ se, e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

b)$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

c)$\langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

d)$\alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle$

Ortogonalidade via produto escalar

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos ortogonais se

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Como

$$\left\langle \vec{0}, \vec{v} \right\rangle = 0$$

para qualquer vetor $\vec{v}$, temos que o vetor nulo é ortogonal a todos os vetores, conforme já havíamos estabelecido anteriormente.

Exemplo:

a) Verifique que os vetores (2,0,3) e (-3,3,2) são ortogonais

$$\langle (2,0,3),(-3,3,2)\rangle = 2.(-3) + 0.3 + 3.2 = 0$$

b) Verifique que os vetores (1,0) e (0,2) são ortogonais

$$\langle (1,0),(0,2)\rangle = 1.0 + 0.2 = 0$$

Norma a partir de produto escalar

A norma Euclidiana que vimos anteriormente pode ser obtida através de um produto escalar, isto é,

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

Essa norma mede o tamanho de um vetor e generaliza nosso conceito de módulo (também usado para medir o tamanho de objetos unidimensionais).

Exemplo:

a) Calcule o tamanho do vetor (2,0,3) segundo a norma Euclidiana.

$$||(2,0,3)|| = \sqrt{\langle (2,0,3),(2,0,3) \rangle} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

b) Calcule o tamanho do vetor (1,0) segundo a norma Euclidiana.

$$||(1,0)|| = \sqrt{\langle (1,0),(1,0) \rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

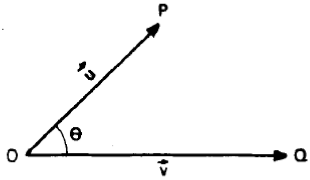
A partir de agora, podemos utilizar a norma Euclidiana para verificar se um vetor é unitário ou não, isto é, quando $||\vec{u}|| = 1$, assim como ocorre com o vetor dado no slide anterior.

Assim, para verificar se uma base é ortonormal podemos utilizar o produto escalar para garantir esse fato.

Mostre que o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, chamada de base canônica, é uma base ortonormal para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, utilizando as ferramentas vistas nessa aula.

Ângulo

Considere os seguintes vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e o ângulo θ formado entre eles.



Pela lei dos cossenos, temos que:

$$||\overrightarrow{PQ}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||.||\vec{v}||.cos(\theta)$$

Veja que $||\overrightarrow{PQ}||^2$ pode ser escrito como

$$||\overrightarrow{PQ}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Verifique a afirmação feita acima.

Assim, substituindo na equação original e simplificando os termos obtemos:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.cos(\theta)$$

Definimos o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pelo θ que satisfaz:

$$cos(\theta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}$$

Veja que dois vetores são ortgonais se, e somente se $\theta = 90^o$.

Exemplo:

Calcule o ângulo entre os vetores $(1, 2)$ e $(1, -1)$.

$||(1, 2)|| = \sqrt{5}$

$||(1, -1)|| = \sqrt{2}$

$\langle(1, 2), (1, -1)\rangle = -1$

$$cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\theta = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Produto vetorial

O produto vetorial entre os vetores $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$ é definido por

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Essa operação produz como resultado um vetor, diferente do que ocorre no caso do produto escalar.

A matriz contém uma linha com as direções $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Essa é uma outra forma de denotar um vetor $w = (a, b, c)$, ou seja, w também pode ser escrito como

$$w = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Isso significa que:

os valores que multiplicam $\vec{i}$ devem ser colocados na primeira coordenada do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

os valores que multiplicam $\vec{j}$ devem ser colocados na segunda coordenada do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

os valores que multiplicam $\vec{k}$ devem ser colocados na terceira coordenada do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exemplo:

Calcule o produto vetorial entre $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (3, 0, 1)$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{i}2 + \vec{j}(-1) + \vec{k}(-6)$$

Assim,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2, -1, -6)$$

Verifique o determinante calculado acima.

Propriedades do produto vetorial

a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D., então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I., então $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||sen(\theta)$ ($||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ representa a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$);

c) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I., então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, simultaneamente;

d) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I., então o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Para determinar uma base para $\mathbb{R}^3$ é sempre necessário tomar um conjunto gerador com *três* vetores L.I.

O produto vetorial é uma ferramenta poderosa para construir uma base para um espaço vetorial.

A partir de dois vetores L.I. podemos gerar um terceiro vetor que, juntamente com os anteriores, formam uma base.

Mostre que os vetores (1,2,3) e (2,1,-3) são L.I. e a partir deles construa uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Referências

BOULOS, P., CAMARGO, I. Introdução à Geometria Analítica no Espaço, Editora Makron Books, 1997.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H. e COSTA, R.C.F. Álgebra Linear, 5a. edição. São Paulo

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. Álgebra Linear, 2a. edição. São Paulo: Harper & How do Brasil, 1980.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books, 1987.

Contato

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: viniciuswasques@gmail.com

Departamento de Matemática

site: https://viniciuswasques.github.io/home/