$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - Cálculo 3 - Ciências da Computação

Exercício 1:

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ onde:

(a) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$ e $\vec{u}$ o versor de $(2,1)$.

(b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ e $\vec{u}$ o versor de $(3,4)$.

(c) $f(x,y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ e $\vec{u}$ o versor de $(1,1)$.

Exercício 2:

Em que direção e sentido a função cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1,1)$

(b) $f(x,y) = ln||(x,y)||$ em $(1,-1)$

(c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $(1, \frac{1}{2})$

Exercício 3:

Uma função diferenciável $f(x,y)$ tem no ponto $(1,1)$ derivada direcional igual a 3 na direção $(3,4)$ e igual a -1 na direção $(4,-3)$. Determine:

(a) $\nabla f(1,1)$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $(1,1)$

Exercício 4:

Calcule a derivada direcional da função $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1,2,-1)$ na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Exercício 5:

Através do teorema do valor médio determine o ponto $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$ do segmento P_0P_1 onde:

(a) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + xy$, $P_0 = (1,2)$ e $P_1 = (4,3)$.

(b) $f(x,y) = x^3 + xy^2$, $P_0 = (1,1)$ e $P_1 = (2,2)$.

Exercício 6:

Seja $f(x,y)$ diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $||\nabla f(x,y)|| \leq M$, para todo (x,y). Prove que

$$|f(x,y) - f(s,t)| \leq M||(x,y) - (s,t)||$$

para todo $(x,y), (s,t) \in \mathbb{R}^2$

Exercício 7:

Verifique se a condição necessária para que exista solução dos sistemas abaixo é satisfeita, se sim, determine o conjunto solução:

(a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ycos(xy) + 3x^2 - y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xcos(xy) - x + 3y^2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \frac{1}{1+y^2} \end{cases}$$

Exercício 8:

Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto dado e satisfaça a condição dada:

(a) $(1,2,1)$ e $\nabla f(x,y) = (2xy^3 - 2x, 3x^2y^2 + 2y - 1)$

(b) $(0,0,2)$ e $\nabla f(x,y) = (\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2} + ye^{y^2})$

Exercício 9:

Um campo de forças $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$, onde P e Q são funções definidas em um aberto A de $\mathbb{R}^2$, é chamado de campo de forças conservativo se existir um campo escalar $\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla\varphi(x,y) = \vec{F}(x,y), \qquad \forall (x,y) \in A$$

A função φ é chamada de função potencial associada ao campo $\vec{F}$.

Verifique se os campos de forças abaixo são conservativos:

(a) $\vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

(b) $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$

(c) $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} + (x+2y)\,\vec{j}$

Exercício 10:

Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo de forças, assim como no exercício anterior. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a,b]$ uma curva de classe C^1 fechada, isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Suponha que, para todo $t \in [a,b]$ temos $\gamma(t) \in A$. Mostre que se $\vec{F}$ for uma campo conservativo então

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = 0$$

Exercício 11:

Estude com relação a máximos e mínimos locais as seguintes funções:

(a) $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$

(b) $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

(c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy$ com $x > 0$ e $y > 0$

(d) $f(x,y) = x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$

Exercício 12:

Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com $1m^3$ de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo de material.

Exercício 13:

Estude com relação a máximos e mínimos as funções abaixo com suas respectivas restrições:

(a) $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ e $3x + y = 1$

(c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

Exercício 14:

Determine:

(a) O ponto da parabola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$

(b) O ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

(c) O ponto da curva $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ mais próximo da origem.