Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios resolvidos 31/05/2016.

Cálculo 1 - Ecologia

Professor:
Vinícius F. Wasques

3 de junho de 2016

1 Exercícios:

Exercício 1.1. *Resolva e analise as soluções dos seguintes sistemas de equações de diferenças:*

(a)

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - y_t \\ y_{t+1} = x_t + 3y_t \end{cases}$$

Solução: *Primeiro escrevemos a matriz correspondente ao sistema:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

depois escrevemos o polinômio característico que é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Desse modo,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

cuja raiz é dada por $\lambda = 2$.

Assim, devemos resolver a seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo o valor de λ temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto à esquerda da equação:

$$\begin{bmatrix} -v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, chegamos que $v_1 = -v_2$, fazendo $v_1 = 1$ temos que $v_2 = -1$, assim

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e a solução geral é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^t + c_2 t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^t$$

Como $2 > 1$ *concluímos que*

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \underbrace{c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^t}_{\to\infty} + \underbrace{c_2 t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^t}_{\to\infty}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \to \infty$$

(b)

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + 2y_t \\ y_{t+1} = -2x_t + y_t \end{cases}$$

Solução: *Primeiro escrevemos a matriz correspondente ao sistema:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

depois escrevemos o polinômio característico que é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Desse modo,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

cujas raízes são dadas por $\lambda_1 = 1 + 2i$ *e* $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Assim, devemos resolver a seguinte equação matricial para cada valor de λ *encontrado*

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo o valor de $\lambda_1 = 1 + 2i$ *temos:*

$$\begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto à esquerda da equação:

$$\begin{bmatrix} -2iv_1 + 2v_2 \\ -2v_1 - 2iv_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} -2iv_1 + 2v_2 = 0 \\ -2v_1 - 2iv_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, chegamos que $v_2 = iv_1$*, fazendo* $v_1 = 1$ *temos que* $v_2 = i$*, assim*

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1 - 2i$ *temos:*

$$\begin{bmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto à esquerda da equação:

$$\begin{bmatrix} 2iv_1 + 2v_2 \\ -2v_1 + 2iv_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} 2iv_1 + 2v_2 = 0 \\ -2v_1 + 2iv_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, chegamos que $v_1 = iv_2$*, fazendo* $v_1 = 1$ *temos que* $v_2 = -i$*, assim*

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

e a solução geral é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} (1+2i)^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} (1-2i)^t$$

Como $r = \sqrt{5} > 1$ temos que a solução geral diverge.

(c)

$$\begin{cases} x_{t+1} = -2x_t + 3y_t \\ y_{t+1} = -2x_t + 5y_t \end{cases}$$

Solução: *Primeiro escrevemos a matriz correspondente ao sistema:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

depois escrevemos o polinômio característico que é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Desse modo,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

cujas raízes são dadas por $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$.
Assim, devemos resolver a seguinte equação matricial para cada valor de λ encontrado.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo o valor de $\lambda_1 = 4$ temos:

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto à esquerda da equação:

$$\begin{bmatrix} -6v_1 + 3v_2 \\ -2v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} -6v_1 + 3v_2 = 0 \\ -2v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, chegamos que $v_2 = 2v_1$, fazendo $v_1 = 1$ temos que $v_2 = 2$, assim

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -1$ *temos:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto à esquerda da equação:

$$\begin{bmatrix} -v_1 + 3v_2 \\ -2v_1 + 6v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} -v_1 + 3v_2 = 0 \\ -2v_1 + 6v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, chegamos que $v_1 = 3v_2$, *fazendo* $v_1 = 1$ *temos que* $v_2 = \frac{1}{3}$, *assim*

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

e a solução geral é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (4)^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} (-1)^t$$

Como $4 > 1$ *concluímos que*

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \underbrace{c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (4)^t}_{\to\infty} + \underbrace{c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} (-1)^t}_{oscila}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \to \infty$$