Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"

Exercícios resolvidos 24/05/2016.

Cálculo 1 - Ecologia

Professor:
Vinícius F. Wasques

28 de maio de 2016

1 Exercícios:

Exercício 1.1. *Encontre a solução das seguintes equações de diferenças e classifique-as:*

(a) $2x_{t+2} - 3x_{t+1} + x_t = 0$

Solução: *Escrevendo a equação característica obtemos:*

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Cujas raízes são dadas por:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

Logo, $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ *são as raízes do polinômio. Assim, a solução geral é dada por:*

$$x_t = c_1(1)^t + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Como $0 < \frac{1}{2} < 1$ *temos que* $c_2(\frac{1}{2})^t \longrightarrow 0$*, isto é, converge para 0. Por outro lado,* $1^t = 1$ *para todo t, então segue que* $c_1(1)^t \longrightarrow c_1$ *e portanto a solução geral converge para*

$$x_t \longrightarrow c_1 + 0 = c_1$$

(b) $16x_{t+2} + 8x_{t+1} = -x_t$

Solução: *Escrevendo a equação característica obtemos:*

$$16\lambda^2 + 8\lambda + 1 = 0$$

Cujas raízes são dadas por:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{32}$$

Logo, $\lambda = -\frac{1}{4}$ *é raiz do polinômio. Assim, a solução geral é dada por:*

$$x_t = c_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^t + c_2 t \left(-\frac{1}{4}\right)^t$$

Como $0 > -\frac{1}{4} > -1$ *temos que* $c_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^t \longrightarrow 0$, *isto é, converge para 0. Por outro lado,* $t \left(-\frac{1}{4}\right)^t$ *também converge para 0. E portanto a solução geral converge para*

$$x_t \longrightarrow 0 + 0 = 0$$

Observação 1.1. *Não entraremos em muitos detalhes por enquanto, mas* $t\left(-\frac{1}{4}\right)^t$ *converge para 0, pois primeiro devemos escreve-lo da seguinte forma:*

$$t\left(-\frac{1}{4}\right)^t = t(-4)^{-t} = -\frac{t}{4^t}$$

Através de uma "regra" chamada regra de L'Hopital pode-se comprovar este fato.

(c) $2x_{t+2} = 4x_{t+1} - 4x_t$

Solução: *Escrevendo a equação característica obtemos:*

$$2\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Cujas raízes são dadas por:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{4}$$

Logo, $\lambda_1 = 1 + i$ *e* $\lambda_2 = 1 - i$ *são as raízes do polinômio. Assim, a solução geral é dada por:*

$$x_t = c_1(1+i)^t + c_2(1-i)^t$$

Como $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1$ *temos que a solução geral diverge*

$$x_t \longrightarrow \infty$$

Exercício 1.2. *Calcule* $tr(A)$, $det(A)$ *e* $A.A$ *onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Primeiro calculemos o traço da matriz que, lembrando, é a soma dos elementos da diagonal:

$$tr(A) = 1 + (-1) = 0$$

Depois calculamos o determinante da matriz que é dada por:

$$det(A) = 1.(-1) - (0).(2) = -1$$

Por fim calculemos o produto de A por A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

onde,

a_{11} *é o produto entre a primeira linha de A pela primeira coluna de A.*
a_{12} *é o produto entre a primeira linha de A pela segunda coluna de A.*
a_{21} *é o produto entre a segunda linha de A pela primeira coluna de A.*
a_{22} *é o produto entre a segunda linha de A pela segunda coluna de A.*

Portanto,

$$A.A = \begin{bmatrix} 1.1 + 0.2 & 1.0 + 0.(-1) \\ 2.1 + (-1).2 & 2.0 + (-1).(-1) \end{bmatrix}$$

$$A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$