6ª Lista de Exercícios - Cálculo 1 - Ciências da Computação

1 Diferencial

Na notação de Liebnitz para derivada de uma função $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, sendo $y = f(x)$, os termos dy e dx são usados apenas como símbolos representativos. O objetivo do conceito chamado "diferencial" é dar uma definição para tais termos de tal forma que a razão $\frac{dy}{dx}$ tenha o mesmo significado que a derivada, em relação à variável x.

Para esse fim, considere $y = f(x)$ uma função diferenciável. Assim a seguinte propriedade é válida:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \tag{1}$$

sendo $\alpha(h) \to 0$ quando $h \to 0$.

Assim, tomando $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ e $h = x - x_0 = \Delta x$ temos:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{2}$$

sendo $y = f(x)$ e $\alpha(\Delta x) \to 0$, quando $\Delta x \to 0$ e $\alpha(0) = 0$.

Desse modo o incremento Δy de uma função consiste de duas parcelas:

- $f'(x)\Delta x$ que é chamado **diferencial de uma função** e denotado por dy ou $df(x)$, isto é, $dy = f'(x)\Delta x$.
- $\alpha(\Delta x)\Delta x$, que para Δx suficientemente pequeno implica em um valor menor que dy.

Observe que se $y = f(x) = x$ então $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 1$ e portanto, o diferencial dy é dado por $dy = \Delta x$, o que sugere adotar o símbolo $dx = \Delta x$ para o diferencial de x. Podemos escrever então $dy = f'(x)dx$, ou seja,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\text{diferencial de y}}{\text{diferencial de x}}.$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$, determinemos os valores de dy e Δy quando $x = 10$ e $\Delta x = 0,01$.
Solução:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta)^2 \\ dy &= f'(x)\Delta x = 2x\Delta x \end{aligned}$$

No ponto $x = 10$ e com $\Delta x = 0,01$, temos:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2(10)(0,01) + (0,01)^2 = 0,2001 \\ dy &= 2(10)(0,01) = 0,2 \end{aligned}$$

Nesse caso, se usarmos dy no lugar de Δy então estaríamos cometendo um erro de $0,0001$.

De modo geral, em cálculos aproximados podemos tomar $dy \approx \Delta y$, isto é, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$.

Exercício 1.1: Prove a igualdade dada na Equação (1).

Exercício 1.2: A partir da Equação (1), mostre que a igualdade dada em (2) é válida.

Exercício 1.3: Seja $f(x) = sen(x)$. Mostre que a função $sen(x)$ pode ser aproximada pela reta $y = x$ numa vizinhança da origem $x = 0$, isto é, demonstre que:

$$sen(k) \approx k,$$

para k próximo de 0.

Exercício 1.4: Demonstre as seguintes propriedades do diferencial de funções reais. Sejam f e g funções reais, então:

1. $d(f+g) = df + dg$
2. $d(f-g) = df - dg$
3. $d(fg) = gdf + fdg$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

2 Taxas Relacionadas

Os problemas de taxas relacionadas são aqueles que envolvem diversas variáveis por meio de algum parâmetro como o tempo t, por exemplo, onde se dá para alguma condição inicial t_0, valores dessas variáveis, bem como taxas de variações de algumas delas, e pede-se para determinar outras taxas de variações quando $t = t_0$. A melhor explicação para esse tipo de problema pode ser o próprio problema.

Exemplo: Seja a área de um quadrado de lado a. Qual a relação entre as variações dos lados $\frac{da}{dt}$ com a variação da área $\frac{dA}{dt}$?

Solução: Considere um quadrado de lado a que varia com o tempo, isto é, $a(t)$. Desse modo, também temos que a área depende do tempo e portanto $A(t)$. Como $A = a^2$, segue que:

$$\frac{dA}{dt} = 2a\frac{da}{dt}$$

dessa forma obtemos uma relação entre os crescimentos (decrescimentos) da área com as variações dos lados.

Exercício 2.1: Considere um balão esférico que está enchendo à razão de $2m^3/min$. Determine a velocidade com que cresce o raio do balão no instante em que tal raio mede 3m. (Considere por simplicidade que a pressão do gás é constante em cada instante).

Exercício 2.2: Considere um reservatório cônico (com vértice para baixo) de a metros de diâmetro e b metros de altura que escoa água à razão constante de $\frac{a}{10}m^3/min$. Com que velocidade baixa o nível da água no reservatório no instante em que a altura vale $\frac{1}{5}b$?

Exercício 2.3: Dois carros A e B saem de um mesmo local no mesmo instante por estradas perpendiculares. O carro A desenvolve uma velocidade igual a metade da velocidade do carro B. Com que velocidade varia a distância entre os carros depois de 2 horas de percurso?

Exercício 2.4: Uma partícula se move ao longo de uma circunferência de raio 1, isto é, sua trajetória é descrita por $x^2 + y^2 = 1$. A velocidade de sua projeção sobre o diâmetro horizontal é $\frac{dx}{dt} = y$, onde y é a projeção da partícula sobre o diâmetro vertical. Calcule $\frac{dy}{dt}$.