5ª Lista de Exercícios - Cálculo 1 - Física

1 Regra da cadeia

Exercício 1.1: Calcule através da regra da cadeia a derivada das seguintes funções:

1. $f(x) = (x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x)^5$
2. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$
3. $f(x) = e^{3x}$
4. $f(x) = sen(x^2)$
5. $f(x) = ln(3x^4 - 2x^3 + 1)$
6. $f(x) = x^2 e^{3x}$
7. $f(x) = x^3 ln(2x)$
8. $f(x) = \frac{cos(2x)}{x^2-1}$
9. $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2$
10. $f(x) = (sen(x) + cos(x))^3$
11. $f(x) = (tg(3x))^2$
12. $f(x) = cos(e^x)$
13. $f(x) = x^x$

Exercício 1.2: Seja g uma função diferenciável e $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Verifique que:

1. $[(g(x))^n]' = n(g(x))^{n-1} g'(x)$.
2. $[(g(x))^{\frac{1}{n}}]' = \frac{1}{n}(g(x))^{\frac{1}{n}-1} g'(x)$, para $n \geq 2$.

Exercício 1.3: Seja f uma função diferenciável que satisfaz a seguinte condição:

$$xf(x) + sen(f(x)) = 4.$$

Mostre que

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{x + cos(f(x))}.$$

Exercício 1.4: Sejam f e g funções diferenciáveis tais que $g(x) = f(x^2 + 1)$. Se $f'(2) = 5$ então calcule $g'(1)$.

Exercício 1.5: Seja $y = e^{\alpha x}$, sendo α a raíz da equação $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ com a e b constantes. Mostre que

$$y'' + ay' + by = 0.$$

2 Derivada implicita

Exercício 2.1: Calcule a derivada das funções $y = f(x)$ dadas a seguir:

1. $y^2 + xy - 1 = 0$
2. $y^3 + y = x$
3. $y = arcsen(x)$

Exercício 2.2: Seja $y = f(x) > 0$ dada implicitamente por $x^2 + 4y^2 = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 1.

Exercício 2.3: Determine a equação da reta tangente à elipse dada por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

no ponto $(0, 3)$.

Exercício 2.4: Mostre que $\frac{x}{2} + 2y = 2$ é a equação da reta tangente à curva $xy = 1$ no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

3 Velocidade e Aceleração

Suponha que uma partícula se mova sobre o eixo x com posição $y = f(x)$. A veocidade média dessa partícula é calculada pela taxa de deslocamento de sua posição pela variação no tempo. Isto é,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Quando essa variação é "pequena" recaímos sobre a definição de derivada. Portanto, $v(x) = f'(x)$ sendo v a velocidade da partícula. Sendo a aceleração $a(x)$ a taxa de variação entre a velocidade pela variação no tempo, temos então que $a(x) = f''(x)$. Sendo assim, responda as seguintes questões:

Exercício 3.1: Considere uma partícula cuja trajetória é descrita por $f(x) = x^2$, com $x \geq 0$. Determine:

1. A velocidade inicial da partícula.
2. A velocidade da partícula no instante $x = 2$.
3. A aceleração inicial da partícula.
4. A aceleração da partícula no instante $x = 2$.

Exercício 3.2: Considere uma partícula cuja trajetória é descrita por $f(x) = cos(3x)$, com $x \geq 0$. Determine:

1. A velocidade inicial da partícula.
2. A velocidade da partícula no instante x.
3. A aceleração inicial da partícula.
4. A aceleração da partícula no instante x.

Exercício 3.3: Considere uma partícula cuja trajetória é descrita por $f(x) = 3 + 2x - x^2$, com $x \geq 0$. Determine:

1. A velocidade da partícula no instante x.
2. A aceleração da partícula no instante x.
3. O instante onde essa partícula atinge altura máxima.