$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - Cálculo 1 - Ciências da Computação

1 Derivada

Exercício 1.1: Mostre por definição de derivada que:

1. Se $f(x) = k$ é uma função constante então $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Se $f(x) = x^{-n}$ então $f'(x) = -nx^{-n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
5. Se $f(x) = ln(x)$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
6. Se $f(x) = sen(x)$ então $f'(x) = cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
7. Se $f(x) = cos(x)$ então $f'(x) = -sen(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
8. Se $f(x) = tg(x)$ então $f'(x) = sec^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.2: Calcule a derivada das seguintes funções:

1. $f(x) = sen(x) + 2x - x^3$
2. $f(x) = cos(x) + e^x$
3. $f(x) = ln(x) + \frac{1}{x}$
4. $f(x) = xsen(x)$
5. $f(x) = \frac{sen(x)}{x^2-1}$
6. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 6$

Exercício 1.3: Verifique se:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ,\text{se } x < 1 \\ -x+4 & ,\text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é uma função diferenciável em $x = 1$.
2. $f(x) = \begin{cases} x^2+x & ,\text{se } x < 1 \\ 2x+1 & ,\text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é uma função diferenciável em $x = 1$.
3. $f(x) = \begin{cases} 2 & ,\text{se } x \geq 0 \\ x^2+2 & ,\text{se } x < 0 \end{cases}$ é uma função diferenciável em $x = 0$.

Exercício 1.4: Seja $f(x) = x^3$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1. Essa curva possui reta normal em $x = 1$? Se sim, determine-a.

Exercício 1.5: Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 8. Essa curva possui reta normal em $x = 8$? Se sim, determine-a.

Exercício 1.6: Mostre que se f é uma função diferenciável em x_0 então f é contínua em x_0. A recíproca é válida? Se sim, demonstre. Caso contrário, exiba um contra-exemplo.

2 Regra de L'Hospital

Exercício 2.1: Utilize a regra de L'Hospital para calcular os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3e^{-4x}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} xln(x)$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$
10. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-2x}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{x^4}$
13. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{x+1}$