Derivada Direcional

Prof. Dr. Vinícius Wasques

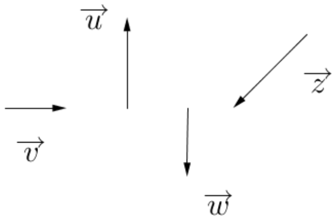
Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

6 de abril de 2020

Conceitos preliminares

Um vetor é uma grandeza definida a partir de três conceitos:

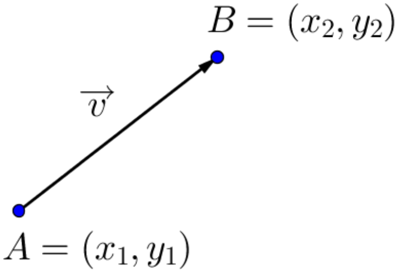
- módulo (comprimento);
- direção (horizontal, vertical, diagonal,...);
- e sentido (esquerda, direita, para cima,...).



Conceitos preliminares

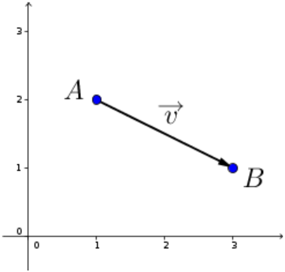
Um vetor $\overrightarrow{v}$ por ser determinado através de dois pontos no plano cartesiano, o ponto inicial $A = (x_1, y_1)$ e o ponto final $B = (x_2, y_2)$. Esse vetor é construído por:

$$\overrightarrow{v} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j}$$



Exemplo: Sejam os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (3, 1)$. Então,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (3-1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} \\ &= 2\vec{i} - 1\vec{j} \end{aligned} \tag{1}$$



Conceitos preliminares

1. Um vetor $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ que possui coordenadas x e y é denotado por:

$$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = (x, y)$$

2. O módulo (comprimento) de um vetor é calculado por:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. O versor de um vetor $\vec{v}$ é dado por:

$$\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

Conceitos preliminares

Exemplo: Seja o vetor $\overrightarrow{v}$ dado por $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.

Conceitos preliminares

Exemplo: Seja o vetor $\overrightarrow{v}$ dado por $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.
Então,

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{v}|| &= \sqrt{(2)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned} \tag{2}$$

Conceitos preliminares

Exemplo: Seja o vetor $\vec{v}$ dado por $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$.
Então,

$$\begin{aligned} ||\vec{v}|| &= \sqrt{(2)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} &= \frac{2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j} \end{aligned} \tag{3}$$

Conceitos preliminares

1. O produto escalar entre dois vetores $\overrightarrow{u} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j}$ é definido pela número real dado por:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 \tag{4}$$

Conceitos preliminares

1. O produto escalar entre dois vetores $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}$ é definido pela número real dado por:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 \tag{4}$$

Exemplo: Sejam $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$. Então, o produto escalar é

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= 2.(-4) + 3.5 \\ &= -8 + 15 \\ &= 7 \end{aligned} \tag{5}$$

Exercícios propostos

Exercício 1: Calcule o versor do vetor $\overrightarrow{u} = 4\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$.

Exercício 2: Calcule o versor do vetor $\overrightarrow{u} = 1\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j}$.

Exercício 3: Sejam $\overrightarrow{u} = 1\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = -2\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j}$. Calcule o produto escalar entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Exercício 4: Sejam $\overrightarrow{u} = 3\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = 1\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j}$. Calcule o produto escalar entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Vetor gradiente

Definição

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis. O gradiente de $f(x, y)$, denotado por $\nabla f(x, y)$, é o vetor definido por

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} \tag{6}$$

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$.

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + y^3$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

Logo,

$$\nabla f(x, y) = 2x\overrightarrow{i} + 3y^2\overrightarrow{j}$$

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + xy^3 + y$.

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + xy^3 + y$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 1$$

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + xy^3 + y$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 1$$

Logo,

$$\nabla f(x,y) = (2x + y^3)\overrightarrow{i} + (3xy^2 + 1)\overrightarrow{j}$$

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$.

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Logo,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) \vec{i} + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) \vec{j}$$

Vetor gradiente

Exemplo: Seja $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Logo,

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\nabla f\underbrace{(1,2)}_{(x,y)} &= \left(\frac{2(1)}{(1)^2+(2)^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{2(2)}{(1)^2+(2)^2}\right)\vec{j} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)\vec{i} + \left(\frac{4}{5}\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Exercícios propostos

Exercício 1: Calcule o vetor gradiente da função $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

Exercício 2: Calcule o vetor gradiente da função $f(x,y) = xsen(xy)$, no ponto $(0,0)$.

Derivada Direcional

Definição

A derivada direcional de uma função $f(x,y)$, denotada por $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$, no ponto (x_0, y_0) e direção de um vetor unitário $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ é dado por

$$D_{\overrightarrow{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x,y) \cdot \overrightarrow{u} \tag{7}$$

Interpretação: A derivada direcional representa a taxa de variação de uma função $f(x,y)$ em toda a direção, representada pelo vetor unitário $\overrightarrow{u}$.

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + xy^2 + 3y$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1,2)$ é dado por:

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 3y$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1, 2)$ é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3$$

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 3y$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1, 2)$ é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3$$

Logo, $\nabla f(x, y) = \left(2x + y^2\right)\overrightarrow{i} + (2xy + 3)\overrightarrow{j}$.

$$\begin{aligned}
\nabla f(1, 2) &= \left(2(1) + (2)^2\right)\overrightarrow{i} + (2(1)(2) + 3)\overrightarrow{j} \\
\nabla f(1, 2) &= 6\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + xy^2 + 3y$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1,2)$ é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3$$

Logo, $\nabla f(x,y) = \left(2x + y^2\right)\overrightarrow{i} + (2xy + 3)\overrightarrow{j}$.

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2) &= \left(2(1) + (2)^2\right)\overrightarrow{i} + (2(1)(2) + 3)\overrightarrow{j} \\ \nabla f(1,2) &= 6\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\overrightarrow{u}} f(1,2) = 6.1 + 7.0 = 6$$

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2y^3$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{i} + \frac{4}{5}\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1,1)$ é dado por:

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2y^3$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{i} + \frac{4}{5}\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1,1)$ é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$$

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2y^3$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{i} + \frac{4}{5}\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1,1)$ é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$$

Logo, $\nabla f(x,y) = \left(2xy^3\right)\overrightarrow{i} + \left(3x^2y^2\right)\overrightarrow{j}$.

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= \left(2(1)(1)^3\right)\overrightarrow{i} + \left(3(1)^2(1)^2\right)\overrightarrow{j} \\ \nabla f(1,1) &= 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Derivada direcional

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2y^3$ e o vetor unitário $\overrightarrow{u} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{i} + \frac{4}{5}\overrightarrow{j}$. Então, a derivada direcional no ponto $(1,1)$ é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$$

Logo, $\nabla f(x,y) = \left(2xy^3\right)\overrightarrow{i} + \left(3x^2y^2\right)\overrightarrow{j}$.

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= \left(2(1)(1)^3\right)\overrightarrow{i} + \left(3(1)^2(1)^2\right)\overrightarrow{j} \\ \nabla f(1,1) &= 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\overrightarrow{u}}f(1,1) = 2.\left(-\frac{3}{5}\right) + 3.\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

Como identificar se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário?

Se $||\overrightarrow{u}|| \neq 1$, então basta tomar o versor de $\overrightarrow{u}$, isto é, $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$.

Exemplo: Seja $f(x, y) = 2x + y^2$ e o vetor $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$. Então, determine a derivada direcional (na direção do versor $\overrightarrow{u}$) no ponto $(1, 1)$.

Como identificar se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário?

Se $||\overrightarrow{u}|| \neq 1$, então basta tomar o versor de $\overrightarrow{u}$, isto é, $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$.

Exemplo: Seja $f(x, y) = 2x + y^2$ e o vetor $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$. Então, determine a derivada direcional (na direção do versor $\overrightarrow{u}$) no ponto $(1, 1)$.

Veja que $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$

Como identificar se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário?

Se $||\overrightarrow{u}|| \neq 1$, então basta tomar o versor de $\overrightarrow{u}$, isto é, $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$.

Exemplo: Seja $f(x, y) = 2x + y^2$ e o vetor $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$. Então, determine a derivada direcional (na direção do versor $\overrightarrow{u}$) no ponto $(1, 1)$.

Veja que $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} &= \frac{1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Como identificar se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário?

Exemplo: Seja $f(x,y) = 2x + y^2$ e o vetor $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$. Então, determine a derivada direcional (na direção do versor $\overrightarrow{u}$) no ponto $(1,1)$.

Como identificar se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário?

Exemplo: Seja $f(x,y) = 2x + y^2$ e o vetor $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$. Então, determine a derivada direcional (na direção do versor $\overrightarrow{u}$) no ponto $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Como identificar se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário?

Exemplo: Seja $f(x,y) = 2x + y^2$ e o vetor $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$. Então, determine a derivada direcional (na direção do versor $\overrightarrow{u}$) no ponto $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Logo, $\nabla f(x,y) = 2\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j}$.

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= (2)\overrightarrow{i} + (2(1))\overrightarrow{j} \\ \nabla f(1,1) &= 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Como identificar se o vetor $\overrightarrow{u}$ é unitário?

Exemplo: Seja $f(x,y) = 2x + y^2$ e o vetor $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}$. Então, determine a derivada direcional (na direção do versor $\overrightarrow{u}$) no ponto $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Logo, $\nabla f(x,y) = 2\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j}$.

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= (2)\overrightarrow{i} + (2(1))\overrightarrow{j} \\ \nabla f(1,1) &= 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\overrightarrow{u}} f(1,1) = 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Exercícios propostos

Exercício 1, página 67 da apostila Unip

Exercício 5, página 68 da apostila Unip

Exercício 2, página 69 da apostila Unip

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação