Aula de exercícios - Derivadas Direcionais e Integral Dupla

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação
Universidade Paulista - UNIP.

https://viniciuswasques.github.io/home/

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Exercício 1:

Seja $f(x, y) = xy$. Determine a derivada direcional no ponto (1,2) e direção $\vec{u}$ = 1 $\vec{i}$ + 3 $\vec{j}$.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^1 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \neq 1$$

Logo, $\vec{u}$ não é unitário

$$\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\nabla f(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$$

O vetor gradiente fornece a direção de maior variação.

$$\nabla f(1, 2) = 2\vec{i} + 1\vec{j}$$

O valor de maior variação (crescimento/decrescimento) é dado por

$$||\nabla f(1,2)|| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$Df(1,2) = 2.\frac{1}{\sqrt{10}} + 1.\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

A derivada direcional fornece a velocidade de maior variação.

Exercício 2: $T(x,y) = \frac{60}{(x^2+y^2)^2}$

a) A derivada direcional no ponto (1,3) e direção $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq 1$$

$$\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{0.(x^2+y^2)^2 - 60.4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$u^2 = (x^2+y^2)^2$ com $u = x^2+y^2$. Assim, a derivada de u^2 é $2u2x = 4x(x^2+y^2)$.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-240x}{(x^2+y^2)^3}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{0.(x^2+y^2)^2 - 60.4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

sendo, $u^2 = (x^2+y^2)^2$ com $u = x^2+y^2$. Assim, a derivada de u^2 é $2u2y = 4y(x^2+y^2)$.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-240y}{(x^2+y^2)^3}$$

Logo, o vetor gradiente é

$$\nabla f(x,y) = \frac{-240x}{(x^2+y^2)^3}\vec{i} + \frac{-240y}{(x^2+y^2)^3}\vec{j}$$

$$\nabla f(1,3) = \frac{-240(1)}{((1)^2+(3)^2)^3}\vec{i} + \frac{-240(3)}{((1)^2+(3)^2)^3}\vec{j}$$

$$\nabla f(1,3) = \frac{-240}{(1+9)^3}\vec{i} + \frac{-720}{(1+9)^3}\vec{j}$$

$$\nabla f(1,3) = \frac{-240}{1000}\vec{i} + \frac{-720}{1000}\vec{j}$$

$$\nabla f(1,3) = -0,24\vec{i} - 0,72\vec{j}$$

Essa é a direção de maior crescimento, respondendo o item b).

Portanto, o valor de maior crescimento é dado por

$$||\nabla f(1,3)|| = \sqrt{(-0,24)^2 + (-0,72)^2}$$

$$||\nabla f(1,3)|| = \sqrt{0,576}$$

$$||\nabla f(1,3)|| \approx 0,78$$

respondendo o item c).

Portanto, a derivada direcional é dada por

$$Df(1,3) = (-0,24).\frac{2}{\sqrt{13}} + (-0,72)\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$Df(1,3) = (-0,24).0,55 + (-0,72).0,83 = -0,732$$

Exercício 3: Calcule

$$\int_0^1 \int_1^2 xy^2 + e^{2x} dydx$$

$$\int_1^2 xy^2 + e^{2x} dy = x\frac{y^3}{3} + e^{2x}y\Big|_1^2 = x\frac{(2)^3}{3} + e^{2x}2 - \left(x\frac{1^3}{3} + e^{2x}1\right)$$

$$= x\frac{8}{3} + e^{2x}2 - \left(x\frac{1}{3} + e^{2x}\right) = \frac{7}{3}x + e^{2x}$$

$$\int_0^1 \frac{7}{3}x + e^{2x} dx = \frac{7}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2x}}{2}$$

Lembrando de Integral por substituição: chamando $u = 2x$ temos $\frac{du}{dx} = 2$, assim $\frac{du}{2} = dx$

$$\int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} = \frac{e^{2x}}{2}$$

Voltando a integral dupla,

$$\int_0^1 \frac{7}{3}x + e^{2x} dx = \frac{7}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{7}{3}\frac{1^2}{2} + \frac{e^{2.1}}{2} - \left(\frac{7}{3}\frac{0^2}{2} + \frac{e^{2.0}}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{6}$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{e^2}{2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{e^2}{2}$$