

SISTEMAS P-FUZZY E APLICAÇÕES

Laécio C. Barros

Universidade Estadual de Campinas
laeciocb@ime.unicamp.br

Vinícius Francisco Wasques

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais
vinicius.wasques@cnpem.br

Estevão Esmi

Universidade Estadual de Campinas
eelaureano@gmail.com

Daniel E. Sánchez

Universidade Austral do Chile
danielsanchez@uach.cl

Francielle Santo Pedro Simões

Universidade Federal de São Paulo
fsimoes@unifesp.br

5 de novembro de 2021

Resumo

O foco desse curso é estudar sistemas evolutivos discretos ou contínuos, em que o campo é descrito de maneira implícita por meio de uma base de regras fuzzy. A denominação “p-fuzzy” vem do fato de conhecermos parcialmente o campo de direções, o qual é modelado por uma coleção de regras fuzzy, de acordo com o especialista do fenômeno modelado. Ao optarmos por um sistema evolutivo em tempo contínuo, o sistema p-fuzzy reproduz a solução de um problema de valor inicial, dado por uma equação diferencial clássica. Por outro lado, se o sistema for discreto, o sistema p-fuzzy reproduz uma solução de uma equação de diferenças. É possível provar que quanto mais refinado for essa coleção de regras, mais próximo do campo teórico ela se torna. Veremos então, sistemas baseados em regras fuzzy, métodos de inferência de Mamdani, Larsen e Tagaki-Sugeno, métodos de defuzzificação e, por fim, aplica-

ções em modelos de dinâmica populacional, química, economia, epidemiologia, entre outros.

Palavras-chave: Base de Regras Fuzzy, Defuzzificação, Inferência de Mamdani, Inferência de Larsen, Inferência de Takagi-Sugeno, Sistemas p-Fuzzy.

Público-alvo. Nível graduação.

Pré-requisitos. Cálculo diferencial e integral e noções de conjuntos fuzzy.

1 Introdução

A teoria de conjuntos fuzzy introduzida em 1965 por Lofti A. Zadeh [31], possibilita incluir aspectos de incertezas na modelagem de certos fenômenos matematicamente. Essa teoria estabelece que as pertinências de elementos a determinados “conjuntos” são graduados, cujos graus variam entre 0 e 1, em que 1 significa total pertinência e 0 significa a não pertinência ao conjunto fuzzy.

Esse minicurso utiliza conceitos na área de lógica fuzzy, que surgem através da modelagem de variáveis linguísticas como “em torno de”, “aproximadamente”, “alto” e “baixo” de modo a relaxar a propriedade atribuída à variável. Por exemplo, na teoria clássica não há dificuldades em verificar que o conjunto dos números reais que são maiores que 0 e menores ou iguais que 1 é determinado pelo intervalo $(0, 1]$. Por outro lado, a tarefa de determinar os elementos que são “próximos” de 0 tem uma certa subjetividade, que depende do contexto e do modelador.

Na literatura o termo “lógica fuzzy” é usado de duas formas diferentes: na teoria conjuntista a fim de manipular informações inexatas, através de uma teoria de conjunto fuzzy geral; e lógica no sentido de “cálculo proposicional”, de modo a estender a lógica clássica [4, 21].

A formulação matemática de incertezas via lógica fuzzy se diferencia da probabilidade, pois, enquanto a estatística lida com incertezas antes dos eventos ocorrerem, a matemática fuzzy considera incertezas mesmo após o evento. Por exemplo, no lançamento de uma moeda a probabilidade estima a “chance” de cara ou coroa, sendo que após o lançamento não há incerteza. Enquanto a lógica fuzzy infere sobre o resultado, se as faces da moeda não são nítidas.

O foco do minicurso é modelar sistemas de equações diferenciais e/ou a diferenças, através de sistemas parcialmente fuzzy (sistemas p-fuzzy) [22, 3, 10, 9, 2]. Tais sistemas reproduzem “trajetórias” que aproximam trajetórias de sistema dinâmico clássico cujo campo é determinado por uma função teórica $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. A estratégia é modelar a função f por um controlador fuzzy, isto é, $f(x) \simeq D(I(F(x)))$, em que F é um operador (fuzzificador) que associa cada entrada $x \in \mathbb{R}^n$ a um conjunto fuzzy, I é um método de inferência fuzzy e D é um operador (defuzzificador) que associa cada conjunto fuzzy a um vetor em \mathbb{R}^m . Essa metodologia será detalhada na Seção 3.

2 Preliminares

Todo subconjunto clássico de um universo U pode ser caracterizado em termos de sua função característica (também chamada de função indicadora) da seguinte forma. Dado um subconjunto A de um universo U , a função característica de A , $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$, é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

A função característica de um número real $a \in \mathbb{R}$ é dada por $\chi_{\{a\}}(x) = 1$, se $x = a$ ou $\chi_{\{a\}}(x) = 0$, se $x \neq a$. A Figura 1 ilustra a função característica $\chi_{\{A\}}$.

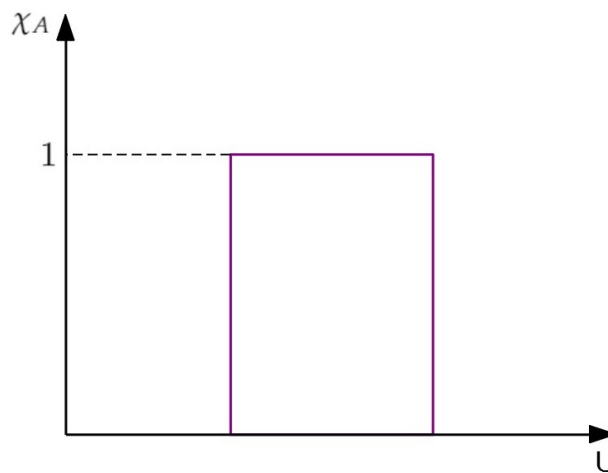


Figura 1: Representação gráfica da função característica $\chi_{\{A\}}$.

Um subconjunto fuzzy é determinado a partir da extensão do contradomínio da função característica, conforme a definição dada a seguir.

Definição 1 (Subconjunto fuzzy). *Seja U um conjunto universo. O subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por sua função de pertinência $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$.*

A função de pertinência deve ser entendida da seguinte forma. O valor $\varphi_A(x)$ em $[0, 1]$ é o grau de pertinência que o elemento x está em A , de modo que sua pertinência a A é tanto maior quanto maior for $\varphi_A(x)$ [4]. A classe de todos os subconjuntos fuzzy de U é denotada por $\mathcal{F}(U)$.

Veja que um subconjunto clássico A é, em particular, um subconjunto fuzzy. Para isso, basta tomar $\varphi_A \equiv \chi_A$.

Exemplo 1. Seja F o subconjunto de \mathbb{N} dado por $F = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é pequeno}\}$. Se a propriedade “pequeno” for precisamente definida, o conjunto F é um conjunto clássico, caracterizado por sua função indicadora. Por exemplo, sejam os números “pequenos” abaixo de 4, isto é $F = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, então $\varphi_F(0) = \varphi_F(1) = \varphi_F(2) = \varphi_F(3) = \varphi_F(4) = 1$ e $\varphi_F(5) = \varphi_F(6) = \dots = 0$.

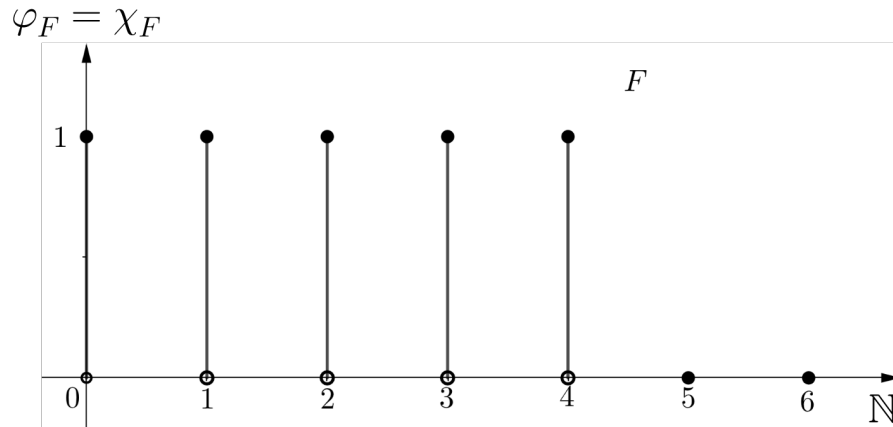


Figura 2: Representação gráfica do conjunto clássico $F = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$.

No exemplo acima a propriedade “pequeno” é precisamente definida. No entanto, dependendo da situação, não é razoável que 4 seja considerado “pequeno” enquanto 5 não. Com intuito de não fazer uma passagem “brusca” podemos adotar uma função para descrever essa passagem mais suave. Tal função deve ser coerente com o termo “pequeno” no sentido que se x for pequeno e $y \leq x$, então y também deve ser pequeno, ou seja, a função φ_F deve ser decrescente.

Exemplo 2. Considere a função de pertinência dada por

$$\varphi_F(n) = \begin{cases} \frac{5-n}{5} & , \text{ se } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & , \text{ se } n > 4 \end{cases} . \quad (1)$$

Através da função de pertinência φ_F os números 0, 1, 2, 3, 4 são considerados pequenos, mas com diferentes graus de pertinência. Isto é, $\varphi_F(0) = 1$, $\varphi_F(1) = 0,8$, $\varphi_F(2) = 0,6$, $\varphi_F(3) = 0,4$ e $\varphi_F(4) = 0,2$. Portanto, no caso fuzzy além de indicar quais elementos possuem a propriedade estabelecida pelo conjunto F , tem-se também um ranqueamento sobre o grau de pertinência (veja Figura 3).

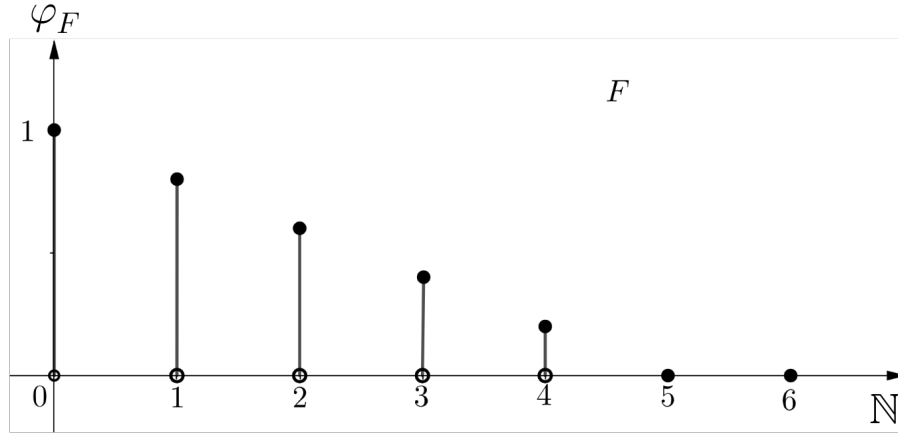


Figura 3: Representação gráfica do conjunto fuzzy F , com φ_F dada por (1).

Operações entre conjuntos fuzzy:

Sejam $A, B \subseteq U$.

- *Caso clássico:*

1. **União:** A união $A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ cuja função característica é dada por

$$\chi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases} ,$$

pode ser reescrita como

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}, \forall x \in U;$$

2. **Intersecção:** A intersecção $A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$ cuja função característica é dada por

$$\chi_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ e } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases} ,$$

pode ser reescrita como

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}, \forall x \in U;$$

3. **Complemento (A^c ou A'):** O conjunto complementar $A' = \{x \in U : x \notin A\}$ cuja função característica é dada por

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin A \\ 0, & \text{se } x \in A \end{cases} ,$$

pode ser reescrita em termos da função de pertinência de A , isto é,

$$\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x), \forall x \in U.$$

Note que o conjunto universo U , tem função de pertinência $\chi_U(x) = 1$, para todo $x \in U$ e o conjunto vazio, denotado por \emptyset , tem função de pertinência $\chi_\emptyset(x) = 0$, para todo $x \in U$.

- *Caso fuzzy:*

As operações anteriores podem ser estendidas, como seguem. Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U . Então tem-se as seguintes operações entre conjuntos fuzzy [16].

1. **União:** A união entre conjuntos fuzzy é dada pela função de pertinência

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U$$

2. **Intersecção:** A intersecção entre conjuntos fuzzy é dada pela função de pertinência

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U;$$

3. **Complemento:** O complementar (A') de um conjunto fuzzy A é dada pela função de pertinência

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \forall x \in U.$$

A Figura 4 ilustra tais operações entre conjuntos fuzzy.

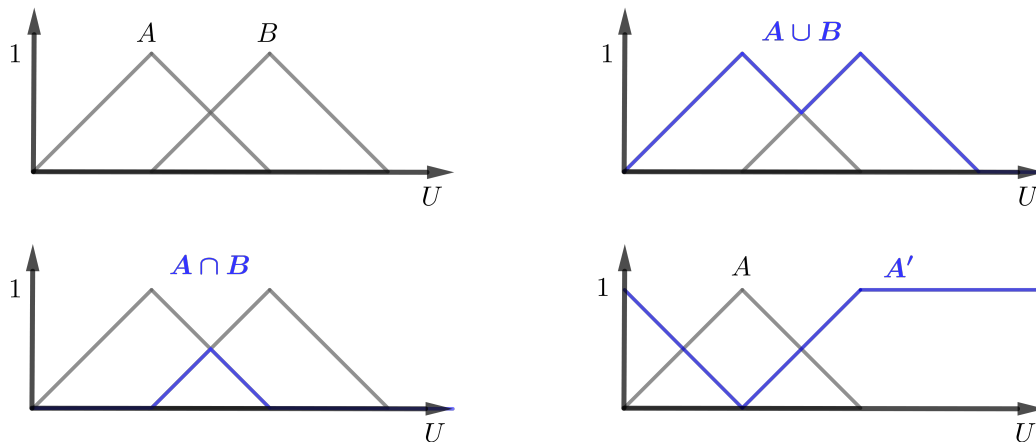


Figura 4: Representação gráfica das operações de união, intersecção e complementar (em azul) de conjuntos fuzzy.

Nota: Como ilustrado na Figura 4, no caso fuzzy pode ocorrer de $A \cap A' \neq \emptyset$.

Produto cartesiano fuzzy

Sejam A_1 subconjunto fuzzy de U_1 , A_2 subconjunto fuzzy de U_2 , ..., A_n subconjunto fuzzy de U_n . O produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é o subconjunto fuzzy de $U_1 \times$

$U_2 \times \dots \times U_n$, cuja função de pertinência é $\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$ é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

em que \wedge denota o operador mínimo [21].

Por exemplo, se A é subconjunto fuzzy de U e B é subconjunto fuzzy de V , o produto cartesiano fuzzy $A \times B$, tem função de pertinência dada por $\varphi_{A \times B} : U \times V \rightarrow [0, 1]$ em que [3]

$$\varphi_{A \times B}(u, v) = \varphi_A(u) \wedge \varphi_B(v) = \min\{\varphi_A(u), \varphi_B(v)\}.$$

A seguir apresentamos a noção de relação fuzzy [4, 7].

Definição 2. *Sejam os universos U_1, U_2, \dots, U_n . Uma relação fuzzy R é um subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, cuja função de pertinência é dada por $\varphi_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$.*

O símbolo $\varphi_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa a pertinência de (x_1, x_2, \dots, x_n) a R e pode ser interpretado como o grau com que x_1, x_2, \dots, x_n estão relacionados segundo a relação R .

A composição de relações binárias fuzzy é dada da seguinte forma. Sejam U, V e W conjuntos universos, R uma relação fuzzy de $U \times V$ e S outra relação de $V \times W$. A relação $T = R \circ S$ de $U \times W$ é definida por

$$\varphi_{R \circ S}(u, w) = \sup_{v \in V} [\min\{\varphi_R(u, v), \varphi_S(v, w)\}].$$

Definição 3 (Regra de composição de inferência). *Sejam U e V dois conjuntos e \mathcal{R} uma relação fuzzy binária sobre $U \times V$. A relação \mathcal{R} define um funcional de $\mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}(V)$ que, a cada elemento $A \in \mathcal{F}(U)$, faz corresponder o elemento $B \in \mathcal{F}(V)$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \sup_{x \in U} [\min\{\varphi_A(x), \varphi_{\mathcal{R}}(x, y)\}]. \quad (2)$$

Essa composição é conhecida como regra de composição de inferência e será utilizada mais adiante nesse texto.

Uma **variável linguística** é uma variável cujo valor é dado qualitativamente por termos linguísticos (que estabelece um adjetivo da variável) e quantitativamente por uma função de pertinência (um conjunto fuzzy).

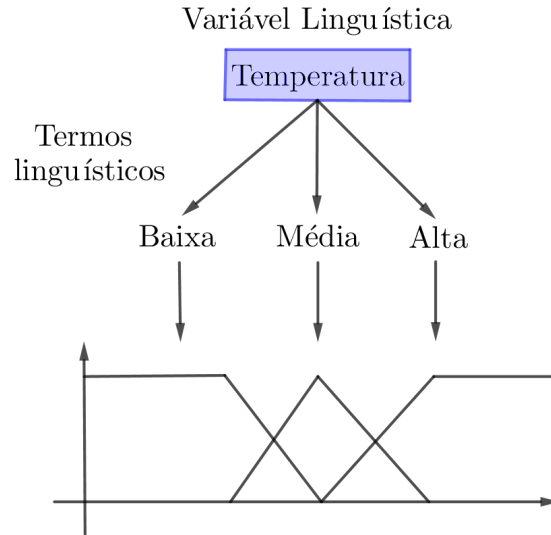


Figura 5: Variáveis linguísticas traduzidas por conjuntos fuzzy.

Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF)

Esse é um dos primeiro tópicos para entendermos os sistemas p-fuzzy. Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF), especificamente controladores fuzzy, é caracterizado por quatro componentes essenciais [21]: um módulo de entrada (*fuzzificação*), um módulo de base de regras, um módulo de inferência fuzzy e um módulo de saída (*defuzzificação*). Esses módulos são representados através do diagrama dado na Figura 6.

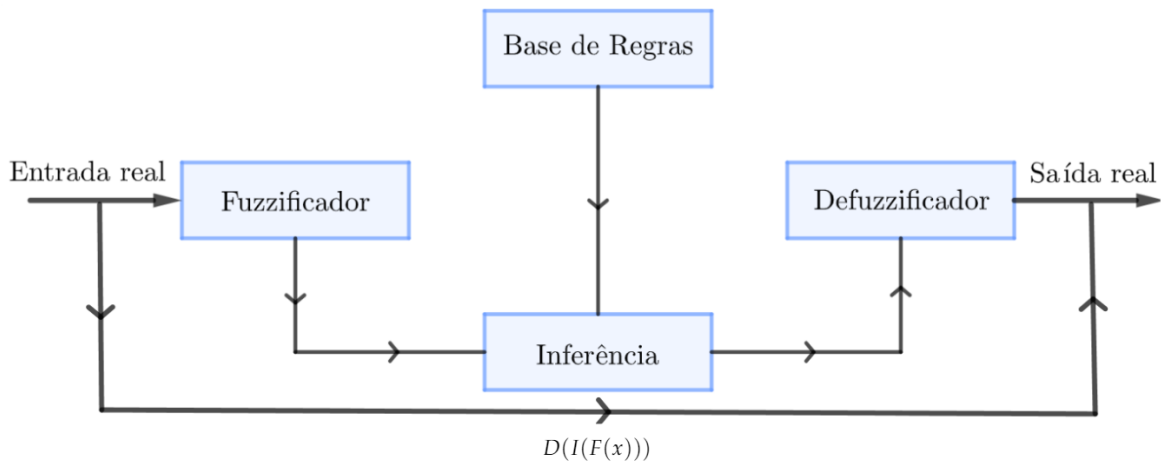


Figura 6: Diagrama de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF). O símbolo $D(I(F(x)))$ é uma notação funcional do SBRF.

- Módulo de fuzzificação: etapa em que as variáveis de entrada reais são “traduzidas” por conjuntos fuzzy;
- Regras fuzzy: são formadas por regras da forma “Se *entrada*, então *saída*”. As va-

riáveis de *entrada* fazem parte do “domínio” e a *saída* do “contradomínio” do controlador. Cada conjunto fuzzy dado nas entradas são chamados de antecedentes, enquanto os das saídas são chamados de consequentes.

Uma base de regras fuzzy é dada por um conjunto (uma tabela) de regras R_i da seguinte forma

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{1n}, \text{ então } u_1 \text{ é } B_{11} \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_{1m}. \\ R_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{21} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{2n}, \text{ então } u_1 \text{ é } B_{21} \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_{2m}. \\ \vdots \\ R_p : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{p1} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{pn}, \text{ então } u_1 \text{ é } B_{p1} \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_{pm}. \end{cases} \quad (3)$$

em que x_k é a k -ésima variável de entrada, A_{ik} é o k -ésimo conjunto fuzzy “antecedente” da regra i , u_j é a j -ésima variável de saída e B_{ij} é o j -ésimo conjunto fuzzy “consequente” do índice i , para $i = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Na Figura 7 representamos graficamente uma base com 5 regras, cada uma com uma entrada e uma saída (análogo a uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R}).

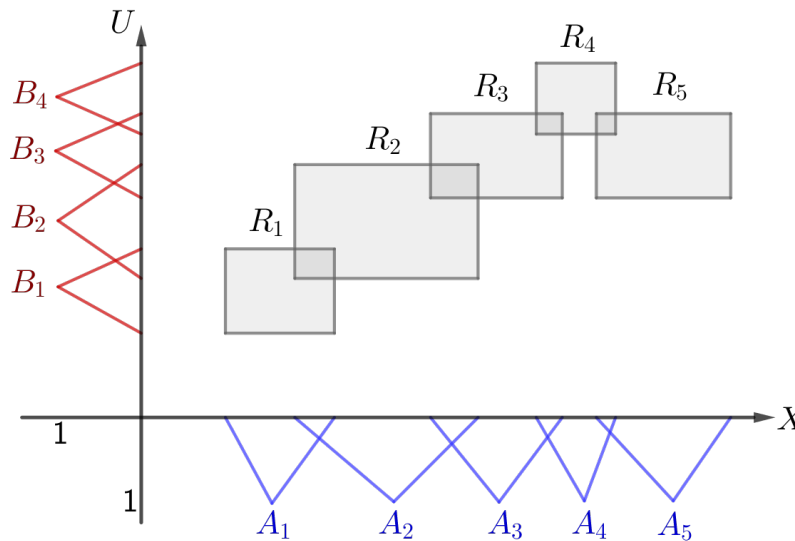


Figura 7: Representação gráfica das regras fuzzy (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, 4$ e (A_5, B_3) . Os triângulos em azul representam os antecedentes, os triângulos vermelhos representam os consequentes e as regiões em cinza representam as regras.

- Método de inferência fuzzy são os métodos que permitem manipular cada entrada de modo a obter uma saída. Os métodos estudados nesse minicurso são o de Mamdani, Larsen e o de Takagi-Sugeno, apresentados adiante;
- Defuzzificação: constitui em representar um conjunto fuzzy através de um número real. Aqui utilizaremos o centróide ou centro de massa (CM)

$$CM(B) = \frac{\sum_{i=1}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_B(u_i)} \quad \text{caso discreto e}$$

$$CM(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du} \quad \text{caso contínuo.}$$

O método é ilustrado na Figura 8.

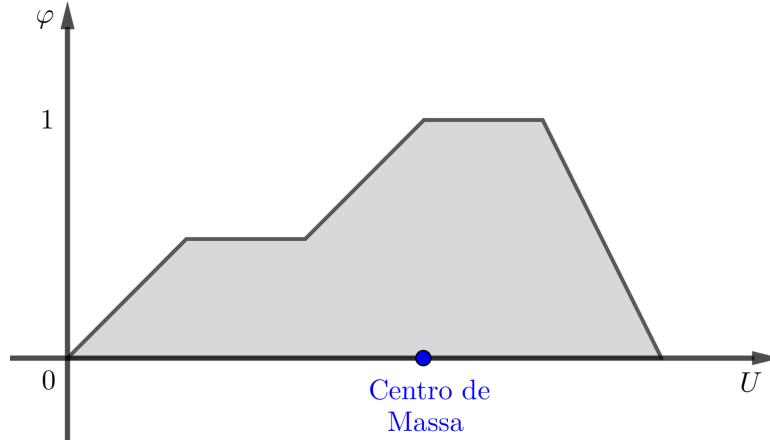


Figura 8: Representação gráfica do centro de massa de um conjunto fuzzy.

A seguir apresentamos o método de inferência via Mamdani.

Método de inferência de Mamdani

Dada uma base de regras fuzzy, como em (3), é possível definir uma relação fuzzy R a partir dos antecedentes A_{ik} e dos consequentes B_{ij} . A seguir destacamos a de Mamdani.

A relação fuzzy de Mamdani M , definida em $(X_1 \times \dots \times X_n) \times (U_1 \times \dots \times U_m)$, é dada pela função de pertinência

$$\begin{aligned} \varphi_M(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) &= \varphi_{R_1}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \vee \\ &\quad \varphi_{R_2}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \vee \\ &\quad \vdots \\ &\quad \varphi_{R_p}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \end{aligned}$$

onde

$$\varphi_{R_i}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = (\varphi_{A_{i1}}(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_{in}}(x_n)) \wedge (\varphi_{B_{i1}}(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{B_{im}}(u_m)) \quad (4)$$

para todo $i = 1, \dots, p$.

Em outras palavras, a relação fuzzy M nada mais é que a união dos produtos cartesianos fuzzy entre os antecedentes e os consequentes de cada regra.

Para um subconjunto fuzzy de entrada $A_1 \times \dots \times A_n$ de $X_1 \times \dots \times X_n$, o conjunto fuzzy de saída $B_1 \times \dots \times B_m$ de $U_1 \times \dots \times U_m$, pelo método de inferência de Mamdani, é dado

por $A \circ M = B$, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(u) = (\varphi_{A \circ M})(u) = \sup_x \{ \varphi_A(x) \wedge \varphi_M(x, u) \}, \quad (5)$$

em que $A = A_1 \times \dots \times A_n$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Exemplo 3. Dada a base de regras, com duas entradas e uma saída

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_{11} \text{ e } y \text{ é } A_{12}, \text{ então } u \text{ é } B_1 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_{21} \text{ e } y \text{ é } A_{22}, \text{ então } u \text{ é } B_2 \end{array} \right\}$$

a Figura 9 ilustra a saída B , para a entrada (A_1, A_2) pelo método de inferência de Mamdani. As funções de pertinência de cada relação fuzzy R_i são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_{R_1}(x, y, u) &= (\varphi_{A_{11}}(x) \wedge \varphi_{A_{12}}(y)) \wedge \varphi_{B_1}(u) \\ \varphi_{R_2}(x, y, u) &= (\varphi_{A_{21}}(x) \wedge \varphi_{A_{22}}(y)) \wedge \varphi_{B_2}(u), \end{aligned} \quad (6)$$

de modo que a função de pertinência da relação M é

$$\varphi_M(x, y, u) = \varphi_{R_1}(x, y, u) \vee \varphi_{R_2}(x, y, u). \quad (7)$$

Assim, o conjunto fuzzy da saída final B tem função de pertinência dada por

$$\varphi_B(u) = \sup_{(x,y)} \{ (\varphi_{A_1}(x) \wedge \varphi_{A_2}(y)) \wedge \varphi_M(x, u) \}. \quad (8)$$

Esse processo pode ser ilustrado através da Figura 9.

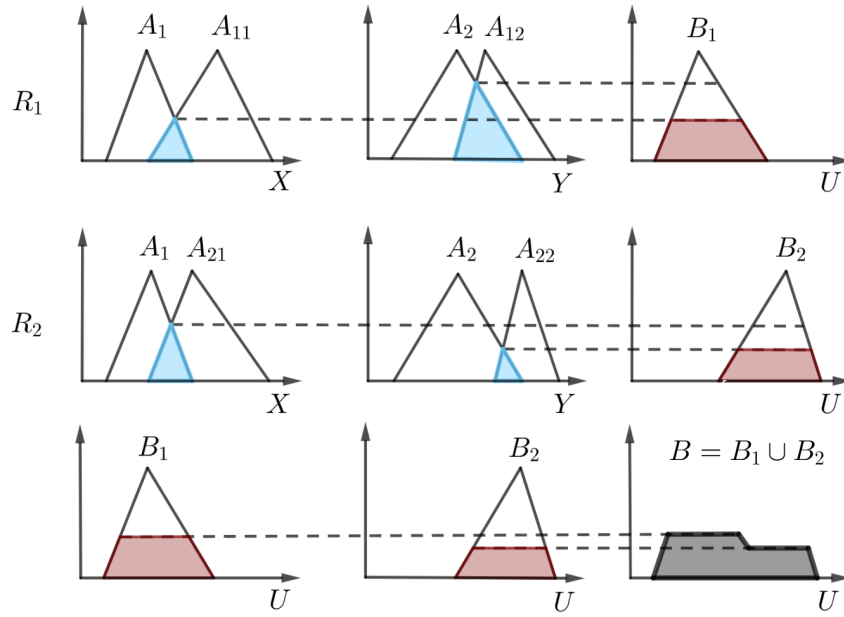


Figura 9: As duas primeiras linhas representam graficamente as regras R_1 e R_2 com saídas parciais B_1 e B_2 para entradas A_1 e A_2 . A terceira linha representa a saída B produzida via Mamdani.

No Exemplo 3 as entradas A_1 e A_2 , bem como a saída são fuzzy. O caso mais comum e de maior interesse é entradas e saídas dadas por números reais. No método de inferência de Mamdani, a saída sempre é um conjunto fuzzy. Para obter um número real precisamos defuzzificar a saída. O exemplo abaixo ilustra esse comentário.

Exemplo 4. Dada a base de regras

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_{11} \text{ e } y \text{ é } A_{12}, \text{ então } u \text{ é } B_1 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_{21} \text{ e } y \text{ é } A_{22}, \text{ então } u \text{ é } B_2 \end{array} \right.$$

como no exemplo anterior.

Vamos ilustrar o método de inferência de Mamdani para uma entrada $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. As funções de pertinência para R_i são obtidas da mesma forma que (6) e a função de pertinência da relação de Mamdani (M) é dada exatamente como (7) do Exemplo 3.

A maior alteração é na fórmula (8) que fornece a saída B , pois a função de entrada é a função característica

$$\chi_{(a_1, a_2)}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) = (a_1, a_2) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Resumidamente, a partir dessa entrada o sistema atua da seguinte forma

$$(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow B \xrightarrow{\text{defuz.}} \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

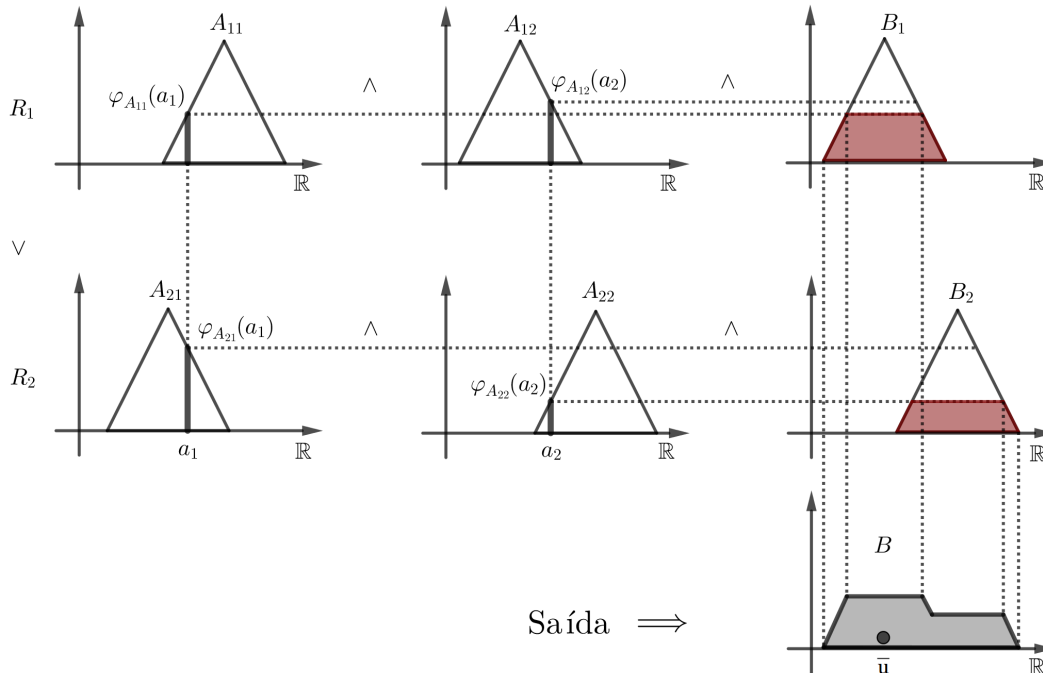


Figura 10: A região em cinza B representa a saída do sistema por Mamdani e $\bar{u} \in \mathbb{R}$ representa o valor defuzzificado de B .

O exemplo a seguir foi tirado de [14] e serve para deixar claro o potencial de controlador fuzzy na “simulação” de uma função matemática em que, na nossa opinião, é impossível escolher uma função clássica para modelar esse exemplo.

Exemplo 5 (Vitalidade das Violetas). Violeta é um tipo de flor muito apreciada pelos apaixonados por plantas. Para que tenha longa vida são necessários pequenos cuidados diários. Por exemplo:

- Ser exposta de meia a uma hora ao Sol pela manhã ou pela tarde (pois a radiação UVB é menor nessas horas).
- Ser regada com aproximadamente 33 ml.

Assim, dados valores de quantidade de água (ml) e de quantidade de exposição ao Sol (em minutos), podemos modelar a “vitalidade das violetas”, via sistemas baseados em regras fuzzy.

Para essa modelagem temos então dois antecedentes: **quantidade de água e tempo de exposição ao Sol**; e um consequente: **vitalidade das violetas**. Para a quantidade de água (ml), adotamos domínio $[0,65]$ e valores fuzzy dados por conjuntos fuzzy triangulares como na Figura 11(a). Já o tempo de exposição ao Sol (em minutos) o domínio é dado por $[0,95]$, cujos valores linguísticos são dados por conjuntos fuzzy triangulares como na Figura 11(b). Por fim, o domínio da variável de saída **vitalidade** da violeta é $[0,1]$ com termos linguísticos dados pelos conjuntos fuzzy triangulares na Figura 12.

A base de regras proposta para essa modelagem, de acordo com um “especialista”, é dada

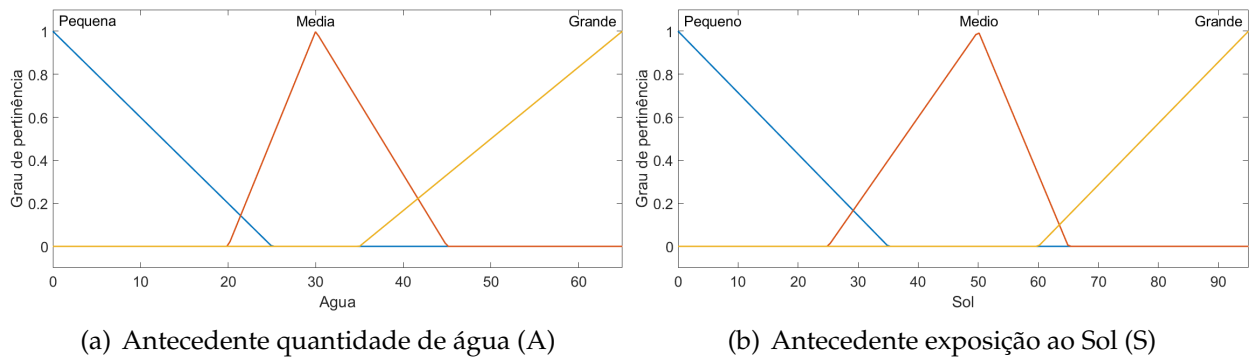


Figura 11: Funções de pertinência dos antecedentes.

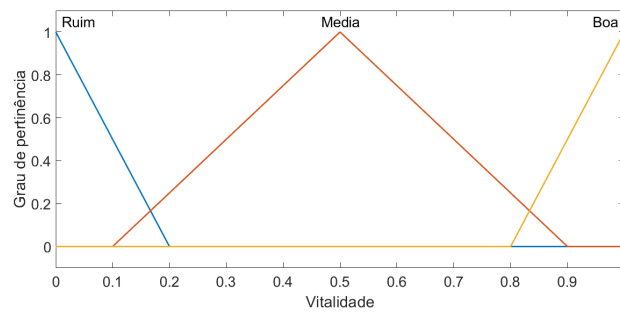


Figura 12: Consequente vitalidade das violetas (V)

na Tabela 1.

Com essa base de regras em mãos é “possível” monitorar a vitalidade da violeta a partir de cuidados. Por exemplo, para uma quantidade de água $a = 40$ ml e tempo de exposição ao Sol de $s = 60$ min, o método de inferência de Mamdani fornece um conjunto fuzzy de saída, cujo valor obtido após a defuzzificação, é dado por $v = 0,625$. Este é o valor da vitalidade, numa escala de 0 a 1, que pode ser interpretado como “**médio** (alto)” para a

Sol(S)/Água (A)	pequena	média	grande
pequeno	média	boa	ruim
médio	média	boa	ruim
grande	ruim	média	ruim

Tabela 1: Base de regras para o problema de vitalidade das violetas

vitalidade da violeta.

Note que, a cada entrada $(a, s) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow v \in \mathbb{R}$, ou seja, implicitamente estamos diante de uma função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

As imagens deste exemplo foram produzidas através do software MatLab. A superfície obtida da saída do SBRF pode ser vista na Figura 13.

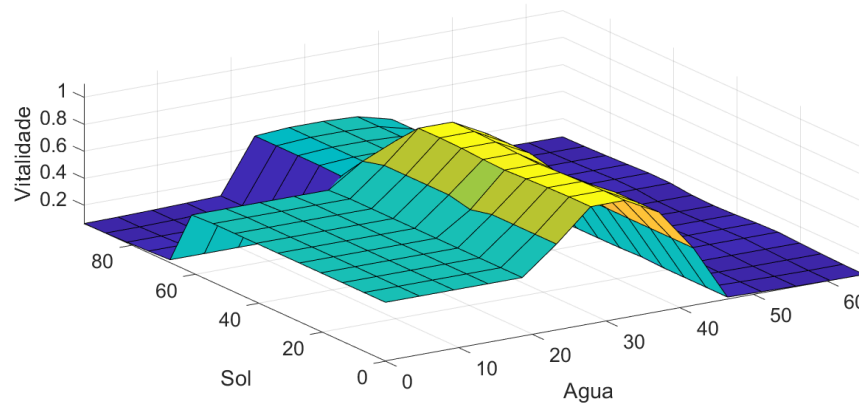


Figura 13: Superfície obtida através da saída do SBRF via Mamdani, para o exemplo de vitalidade da violeta.

O método de Mamdani foi aplicado no estudo de estadiamento do câncer de próstata por Castanho [8] e posteriormente por Silveira et al [29].

A seguir o método de inferência fuzzy via Larsen é apresentado.

2.1 Método de inferência fuzzy de Larsen

O método de inferência fuzzy de Larsen é dado de modo similar ao método de inferência de Mamdani. A diferença entre os dois métodos é que Larsen propõe o uso do operador produto no lugar do operador mínimo, na pertinência dada em (4). Isto é, as funções de pertinência de φ_{R_i} via método de Larsen são dadas por

$$\varphi_{R_i}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = (\varphi_{A_{i1}}(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_{in}}(x_n)) \cdot (\varphi_{B_{i1}}(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{B_{im}}(u_m)) \quad (9)$$

A Figura 14 ilustra o método de Larsen a partir de entradas crisp. Perceba que os conjuntos fuzzy B_1 e B_2 (triângulos em vermelho) da Figura 14 são distintos dos obtidos via método de Mandani (veja Figura 10).

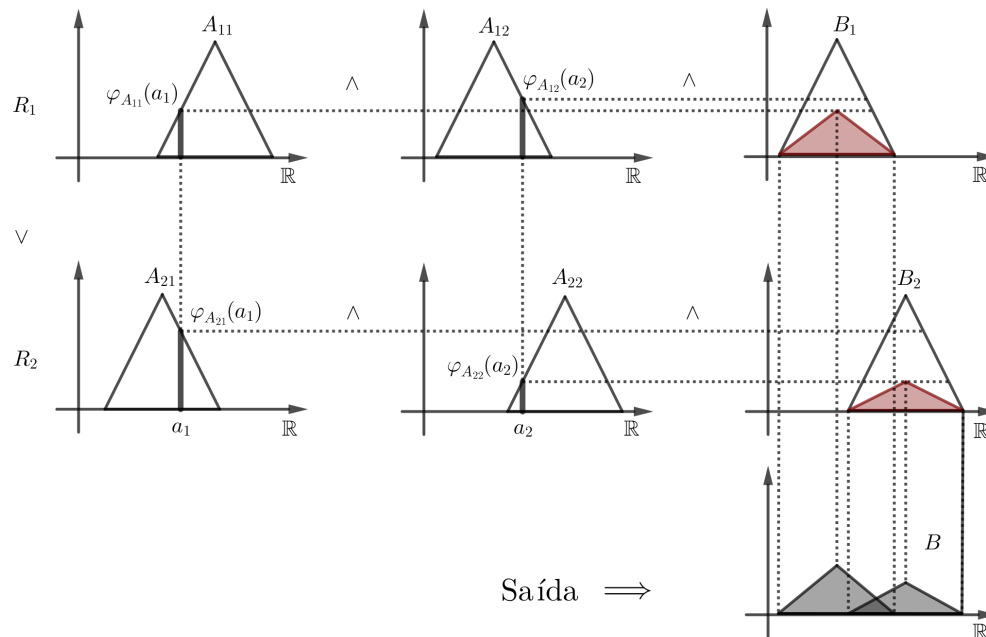


Figura 14: A região em cinza B representa a saída do sistema por Larsen.

Para ilustrar a diferença entre os métodos de inferência de Mamdani e Larsen, vamos reproduzir o problema da vitalidade das violetas utilizando agora o método de Larsen.

Exemplo 6 (Vitalidade das Violetas via método de Larsen). Considere os mesmos conjuntos fuzzy de entrada (veja Figura 11) e saída (veja Figura 12), bem como a base de regras dada pela Tabela 1.

Tomando os mesmos valores de entrada (como no exemplo de Mamdani) $a = 40$ ml e $s = 60$ min, a saída obtida pelo método de inferência de Larsen é dada por $v = 0,646$, significando que a vitalidade pode ser interpretada como “**média** (alta)”.

A fim de comparação, as Figuras 15 e 16 ilustram respectivamente as saídas dos métodos de Mamdani e Larsen, no software MatLab [17].

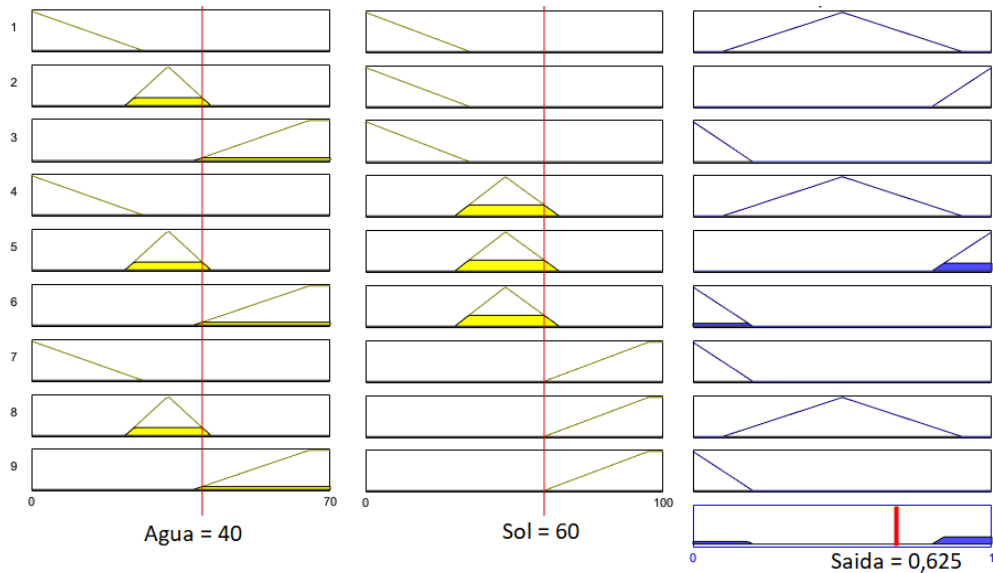


Figura 15: Método de Mamdani para o problema de vitalidade das violetas, cuja saída é $v = 0,625$.

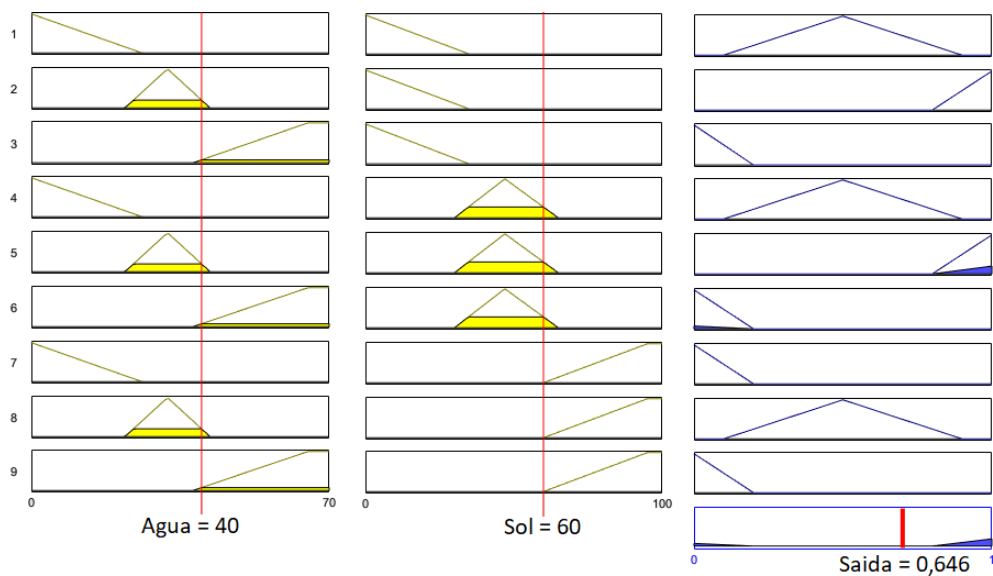


Figura 16: Método de Larsen para o problema de vitalidade das violetas, cuja saída é $v = 0,646$.

Nos Apêndices A.1 e A.2, como alternativa ao MatLab [17], implementamos os Exemplos 5 e 6 em Python via biblioteca Simpyful [30].

A seguir o método de inferência fuzzy via Takagi-Sugeno é apresentado.

2.2 Método de inferência fuzzy de Takagi-Sugeno

Diferentemente do método de Mamdani, o método de Takagi-Sugeno tem funções como consequentes no SBRF. Isto é, as regras são do tipo: “Se x é *alto*, então $y = ax + b$ ”. De um modo geral, o SBRF via Takagi-Sugeno é dado por

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{1n}, \text{ então } y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n). \\ R_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{21} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{2n}, \text{ então } y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n). \\ \vdots \\ R_p : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{p1} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{pn}, \text{ então } y_p = g_p(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

A saída obtida por esse sistema é fornecida da seguinte forma

$$y = \frac{\sum_{j=1}^p w_j \cdot g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sum_{j=1}^p w_j}, \quad (10)$$

em que $w_j = \varphi_{A_{j1}}(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_{jn}}(x_n)$, para todo $j = 1, \dots, p$.

Exemplo 7. Considere o seguinte SBRF dado pelo método de Takagi-Sugeno.

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_1, \text{ então } y_1 = x + 2 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_2, \text{ então } y_2 = 2x \end{cases} ,$$

para todo $x \in [0, 6]$, cujas funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A_1 e A_2 são dados respectivamente por

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x, & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ 0, & \text{se } x \geq 4 \end{cases} ,$$

e

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \end{cases} .$$

Note que $\varphi_{A_1}(x) + \varphi_{A_2}(x) = 1$, para todo $x \in [0, 6]$. Assim, a saída obtida é dada por

$$y(x) = \frac{\varphi_{A_1}(x)(x + 2) + \varphi_{A_2}(x)(2x)}{\varphi_{A_1}(x) + \varphi_{A_2}(x)}$$

$$y(x) = \varphi_{A_1}(x)(x + 2) + \varphi_{A_2}(x)(2x).$$

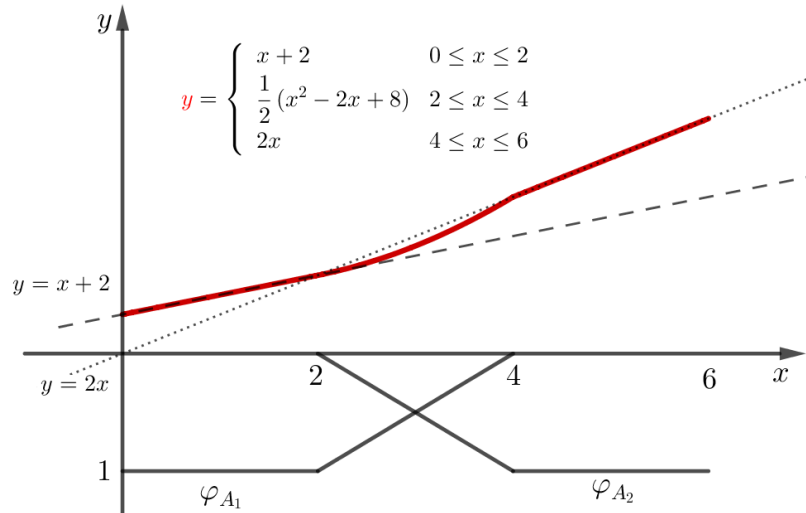


Figura 17: Representação gráfica da função de saída y dada em (11). A linha contínua representa a saída y , a linha tracejada representa a função $y_1 = x + 2$ e a linha pontilhada representa a função $y_2 = 2x$.

Portanto,

$$y(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8) & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ 2x & \text{se } 4 < x \leq 6 \end{cases} \quad (11)$$

Na Figura (17), podemos visualizar a solução (12). No Apêndice A.3 implementamos esse exemplo em Python via biblioteca Simpyful [30].

Exemplo 8. Considere a base de regras:

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é pequeno, então } y = 0,7x + 7,2 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é médio, então } y = -0,3x + 5,5 \\ R_3 : \text{Se } x \text{ é grande, então } y = x \end{cases} ,$$

em que os conjuntos fuzzy antecedentes são dados na Figura 18. A saída obtida pelo sistema é a função, cujo o gráfico é visto na Figura 19.

Exemplo 9. Considere a base de regras dada por:

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é pequeno e } y \text{ é pequeno, então } z = -x + y - 1 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é pequeno e } y \text{ é grande, então } z = -0,7y + 4 \\ R_3 : \text{Se } x \text{ é grande e } y \text{ é pequeno, então } z = -0,5x + 2 \\ R_4 : \text{Se } x \text{ é grande e } y \text{ é grande, então } z = x + y + 3 \end{cases} ,$$

em que os antecedentes desse sistema são representados na Figura 20.

A saída desse SBRF é dada pela Figura 21.

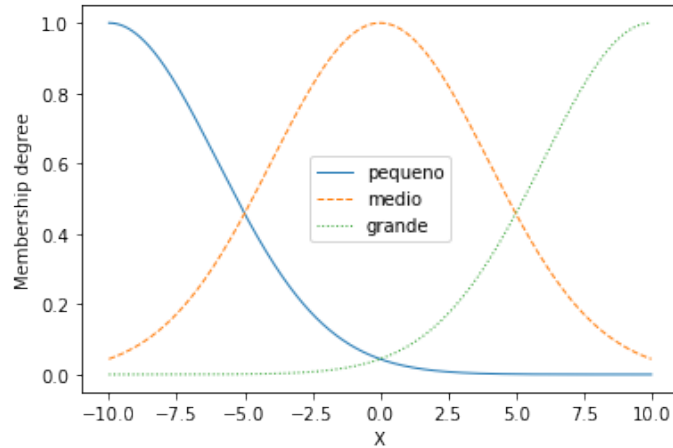


Figura 18: Conjuntos fuzzy de entrada para o SBRF.

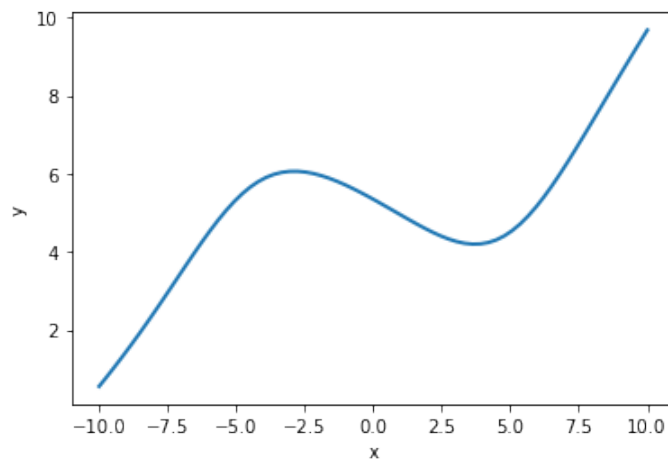


Figura 19: Saída do SBRF via Takagi-Sugeno.

Nos Exemplos 8 e 9 utilizamos a biblioteca Simpful [30] do Python para a implementação.

Os exemplos abaixo tem como objetivo traçar um paralelo dos métodos de infêrencia fuzzy como métodos clássicos de obtenção de uma função a partir de um conjunto de dados. A base de regras faz o papel do conjunto de dados. Já o método de obtenção da relação fuzzy (Mamdani, Larsen, Takagi-Sugeno) faz papel do método para obter a função (mínimos quadrados ou interpolação polinomial) no caso clássico.

Exemplo 10. Para traçar um paralelo do método de Mamdani com métodos clássicos a partir de um conjunto de dados (base de regras ou tabela) considere a base de regras

$$\begin{array}{l}
 \text{Se } X \text{ então } Y \\
 A_1 = (0; 1; 2) \parallel (1; 2; 3) = B_1 \\
 A_2 = (1; 2; 4) \parallel (2; 3; 4) = B_2 \\
 A_3 = (3; 4; 5) \parallel (0; 1; 2) = B_3
 \end{array}$$

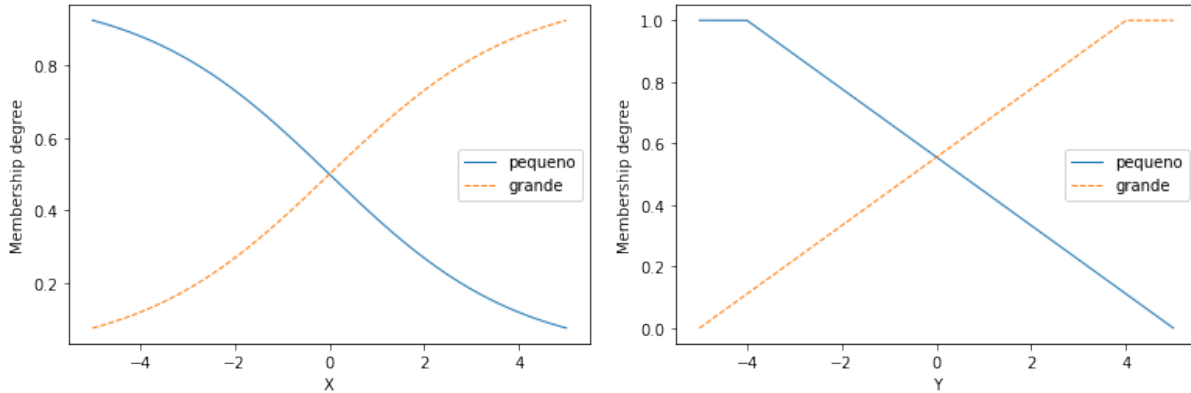


Figura 20: Antecedentes do SBRF via Tagaki-Sugeno. A Subfigura da esquerda representa os conjuntos fuzzy associados à x . A Subfigura da direita representa os conjuntos fuzzy associados à y .

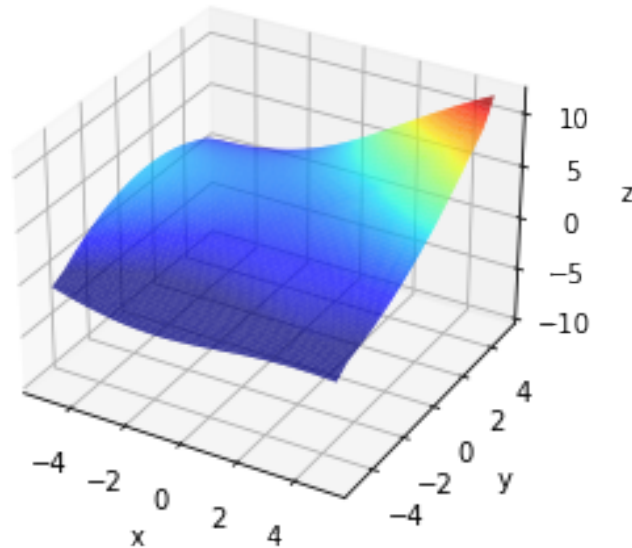


Figura 21: Superfície obtida através da saída do SBRF via Tagaki-Sugeno.

- Supondo a entrada $x = 1,5$, faça uma figura representando a saída $B = A \circ M$ obtida pelo método de inferência de Mamdani para a base de regras acima. Faça o mesmo para a entrada $x = 3,5$;
- A partir do centro de massa, defuzzifique as saídas obtidas no item a).

Resolução a) e b): A saída obtida pelo sistema baseado em regras fuzzy, a partir da entrada $x = 1,5$ é dada pela região azul na Figura 22. A região amarela ilustra as regras que a entrada está ativando. Em vermelho, temos a saída $y = 2,5$ obtida pelo sistema, através do centro de massas. De modo similar, a Figura 23 representa a saída $y = 1,74$, obtida a partir da entrada $x = 3,5$.

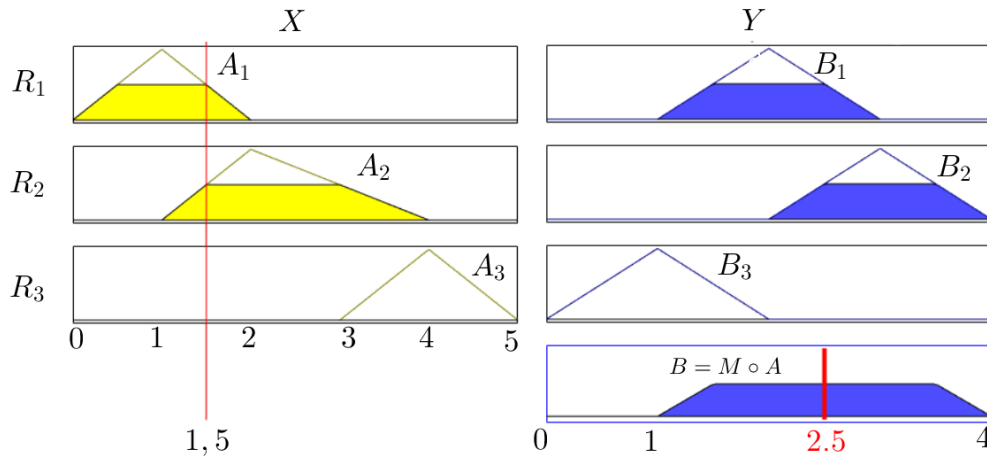


Figura 22: SBRF via método de Mamdani do item 1 a), para $x = 1,5$.

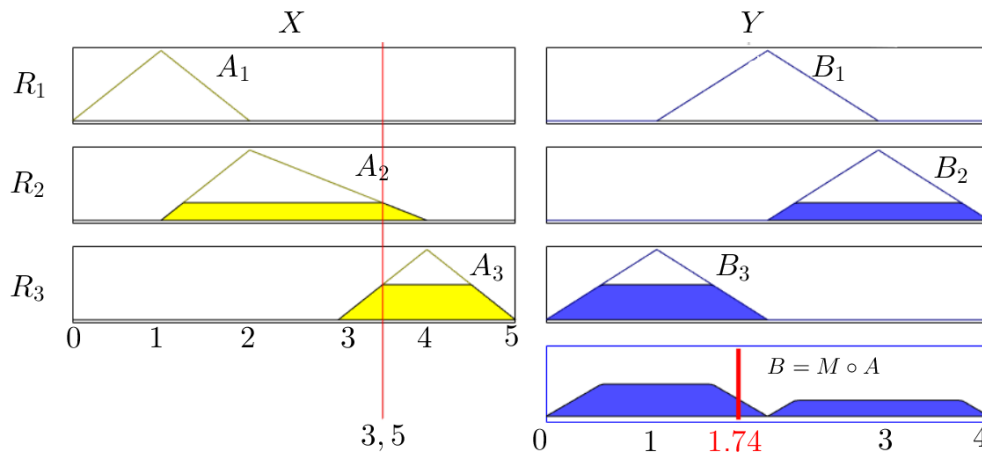


Figura 23: SBRF via método de Mamdani do item 1 a), para $x = 3,5$.

- c) Utilizando o método de inferência de Larsen (9), repita os itens a) e b).

Resolução: A partir da entrada $x = 1,5$ obtemos a saída $y = 2,5$, através do centro de massas e para a entrada $x = 3,5$ obtemos a a saída $y = 1,67$, através do centro de massas. As Figuras 24 e 25 ilustram o método de Larsen para entra $x = 1,5$ e $x = 3,5$, respectivamente.

- d) Supondo que os dados da tabela fossem precisos, isto é, se $x_1 = 1$ então $y_1 = 2$, se $x_2 = 2$ então $y_2 = 3$ e se $x_3 = 4$ então $y_3 = 1$. Obtenha uma função $y = f(x)$ por mínimos quadrados, onde f é um polinômio de segundo grau;

Resolução: Tomando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que a partir dos dados fornecidos o método do mínimos quadrados produz

$$f(x) = -\frac{1}{3} + 3x - \frac{2}{3}x^2.$$

- e) Determine $\bar{y} = f(1,5)$ e $\bar{y} = f(3,5)$ usando a f do item d). Compare esses resultados

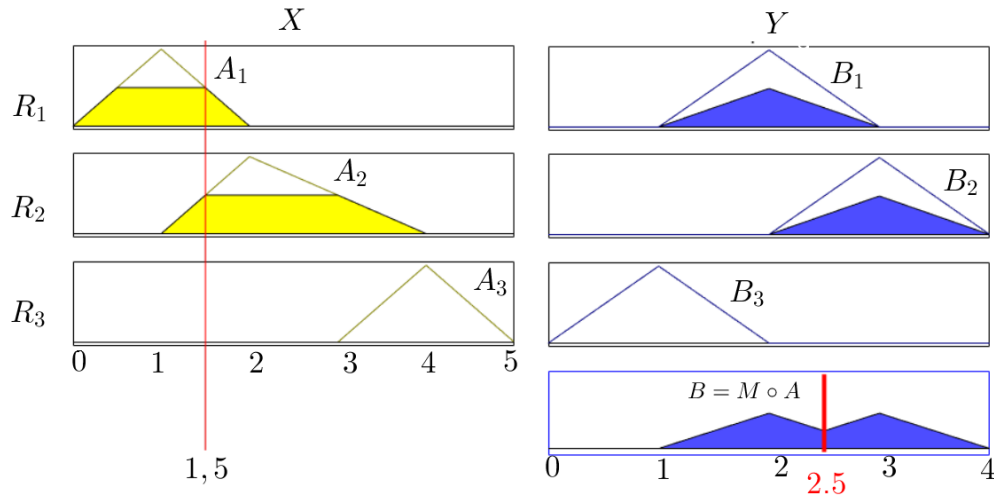


Figura 24: SBRF via método de Larsen do item c), para $x = 1,5$.

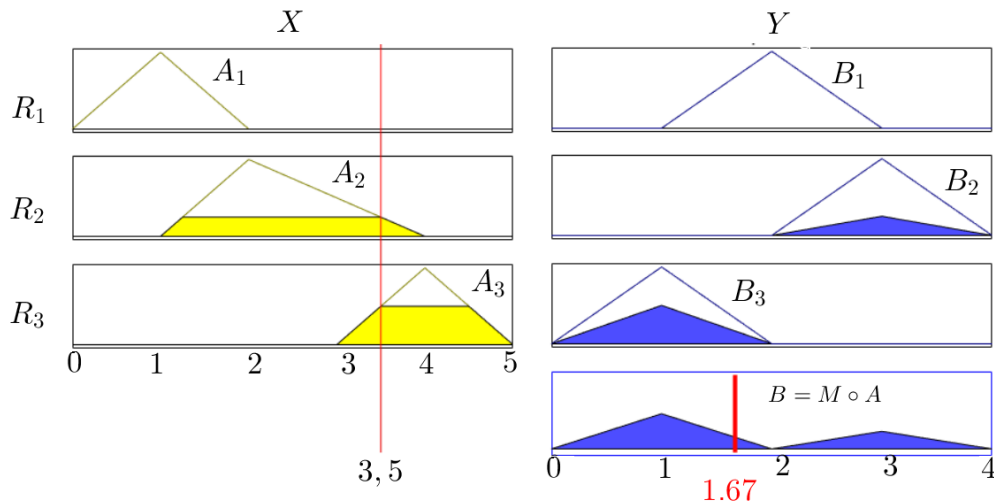


Figura 25: SBRF via método de Larsen do item c), para $x = 3,5$.

com os encontrados no item b) e c).

Resolução: Utilizando a função obtida no item anterior, temos que $f(1,5) = 2,6667$. Como visto no item b), o SBRF produz como saída defuzzificada $y = 2,5$. Temos também que $f(3,5) = 2$, enquanto que a saída obtida pelo SBRF é $y = 1,74$. Já no item c), o SBRF produz como saída defuzzificada para as entradas $x = 1,5$ e $x = 3,5$ os valores $y = 2,5$ e $y = 1,67$ respectivamente. Portanto, nota-se que o SBRF fornece valores que são próximos da função f obtida pelo método de mínimos quadrados.

Para visualizar melhor essa comparação, veja a Figura 26. Note que a base de regras aproxima a função f , de modo que quanto maior o número de regras, melhor será a aproximação.

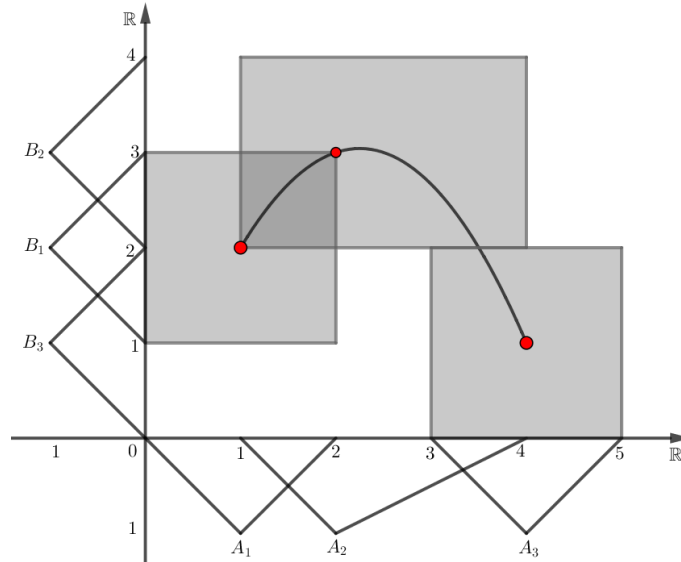


Figura 26: Representação gráfica da base de regras e função f do Exemplo 10.

Exemplo 11. Considere a seguinte base de regras:

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é baixo}(A_1), \text{ então } y_1 = x + 2 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é alto}(A_2), \text{ então } y_2 = 4 - x \end{cases}$$

onde

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a) Use o método de inferência de Takagi-Sugeno para obter a saída geral no domínio $[0, 4]$.

Resolução: Como $w_1 + w_2 = \varphi_{A_1}(x) + \varphi_{A_2}(x) = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x}{4} = 1$, então

$$y = \frac{\varphi_{A_1}(x)(x+2) + \varphi_{A_2}(x)(4-x)}{\varphi_{A_1}(x) + \varphi_{A_2}(x)}$$

$$y = \left(1 - \frac{x}{4}\right)(x+2) + \left(\frac{x}{4}\right)(4-x)$$

$$y = \frac{1}{4}(-2x^2 + 6x + 8).$$

- b) Determine y para $x = 3$.

Resolução: Do item anterior, temos que

$$y(3) = \frac{1}{4}(-2(3)^2 + 6(3) + 8) = 2.$$

- c) Represente graficamente a base de regras e a função obtida pelo método de Takagi-Sugeno.

Resolução: A base de regras para esse exercício pode ser vista na Figura 27 e a função obtida como saída do sistema via Takagi-Sugeno por ser vista na Figura 28.

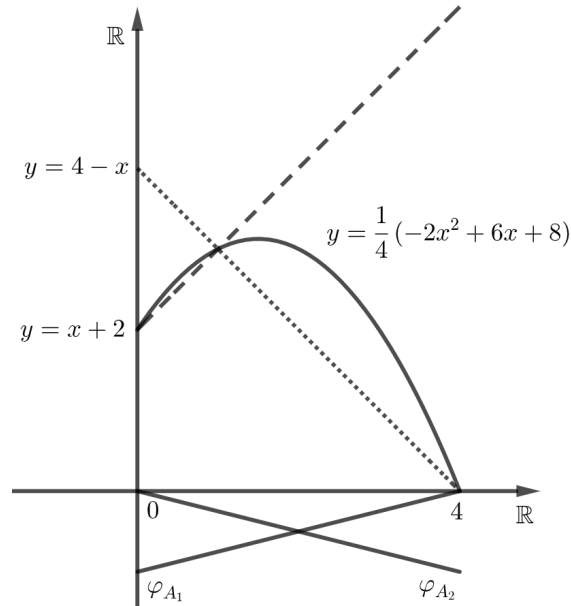


Figura 27: Base de regras e a função f dada pela saída do método Takagi-Sugeno para o Exemplo 11.

A Figura 28 ilustra a saída do método via Takagi-Sugeno através do software Matlab [17]. A curva em azul da Figura 28 é a mesma que a curva representada por uma linha contínua na Figura 27.

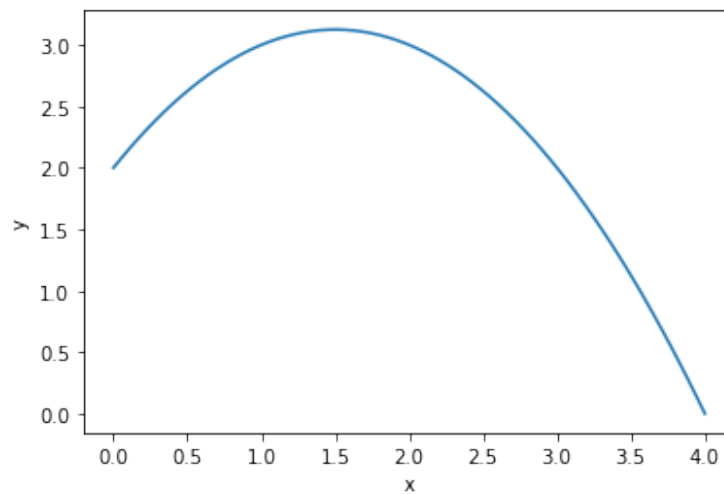


Figura 28: Saída do sistema obtida pelo método de Takagi-Sugeno o para o Exemplo 11.

3 Sistemas p-Fuzzy

Como dito na introdução, os sistemas p-fuzzy estudados nessa seção se utilizam predominantemente do método de inferência fuzzy de Mamdani.

A denominação "sistemas p-fuzzy" significa sistemas parcialmente fuzzy. Esse tipo de abordagem estuda problemas em que o campo de direções de uma equação diferencial ou de diferença, associada a um Problema de Valor Inicial (PVI) ou de Contorno (PVC), é conhecido apenas qualitativamente.

Este minicurso se dedica a estudar então problemas da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases},$$

sendo que o campo de direções descrito por f é parcialmente conhecido e será descrito por uma base de regras fuzzy, consistente com o modelo a ser estudado.

Sendo assim, tais problemas se apresentam da seguinte forma.

- Caso discreto:

$$(I) = \begin{cases} \text{clássico} \\ x_{k+1} = f(x_k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \approx (II) = \begin{cases} \text{p-fuzzy} \\ \tilde{x}_{k+1} = D(I(F(\tilde{x}_k))) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

A solução do sistema (I) é dada pelos métodos clássicos conhecidos, desde que f seja conhecida. Mas o interesse aqui é supor que f é conhecida apenas "parcialmente" através das principais propriedades do fenômeno em questão. Neste caso, veremos que o controlador fuzzy é capaz de "produzir" uma "função" $F(\cdot)$ a partir das tais propriedades conhecidas. Assim, as soluções que investigaremos (\tilde{x}_{k+1}) devem ter propriedade de $\tilde{x}_k \approx x_k$.

- Caso contínuo:

Como no caso discreto, com $F(\cdot)$ em mãos, a solução que interessa é a do sistema (II), e a solução \tilde{x}_n é dada por algum método numérico para Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O), como por exemplo o de Euler (ou de Runge-Kutta) [24]

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + hD(I(F(\tilde{x}_n))),$$

onde h é o passo.

Assim, o principal foco do curso é apresentar cada passo para se chegar na função $D(I(F)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Embora seu grande poder de aplicação seja na indústria de controle e automação, nós temos utilizado essa teoria voltada para fenômenos biológicos tais como estratégias no controle de pragas, previsão de incêndio florestal, modelagem de

propagação de doenças além de aspectos matemáticos puramente teórico, como equações diferenciais. Aqui, essa abordagem será aplicada em alguns modelos em biomatemática [26], economia [25] e química [27] a fim de ilustrar as vantagens de se considerar aproximações de soluções via sistemas p-fuzzy.

A subjetividade suportada pelos sistemas p-fuzzy se refere à imprecisões quanto aos estados iniciais das variáveis e quanto aos parâmetros.

Com a finalidade de facilitar a notação trocaremos $(D(I(F(x))))$ por $SBRF_f(x)$. Ressaltamos que, com o aumento de regras temos $SBRF_f(x) \rightarrow f(x)$. Consequentemente, espera-se que a trajetória via p-fuzzy se aproxime daquela via métodos clássicos. O exemplo abaixo é para ilustrar esse fato.

Exemplo 12. Em dinâmica de populações é aceito o princípio:

“Em cada instante t , a taxa de variação de uma população é diretamente proporcional ao tamanho da população”

Malthus modelou essa lei pelo PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (12)$$

cuja solução é $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$.

Agora a partir da lei é possível escrever a base de regras, considerando t como entrada e variação $\frac{dx}{dt}$ como saída. Aqui adotaremos apenas quatro regras para o SBRF

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se a população } x \text{ for } \mathbf{muito pouca}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \mathbf{muito pouca}. \\ R_2 : \text{Se a população } x \text{ for } \mathbf{pouca}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \mathbf{pouca}. \\ R_3 : \text{Se a população } x \text{ for } \mathbf{média}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \mathbf{média}. \\ R_4 : \text{Se a população } x \text{ for } \mathbf{muita}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \mathbf{muita}. \end{cases} \quad (13)$$

Nesse caso, as variáveis linguísticas são modeladas pelos conjuntos fuzzy dados nas Figuras 29(a) (antecedentes) e 29(b) (consequentes).

A solução $x(t)$ do modelo p-fuzzy é dada através do método clássico de Euler:

$$x_{n+1} = x_n + hSBRF_f(x_n),$$

em que $SBRF_f(x_n)$ representa a saída do SBRF, produzido pelo controlador fuzzy. Por exemplo, se $h = 0,1$ e $x_0 = 2$, temos que $SBRF_f(x_0) \approx 4,1062$ e assim

$$x_1 = x_0 + h \cdot SBRF_f(X_0) = 2 + 0,1 \cdot 4,1062 \approx 2,4106,$$

e o processo de iteração continua de modo similar para x_2, x_3, \dots, x_n .

Com isso, a partir da base de regras dada em (13), obtém-se a seguinte solução dada na Figura 30.

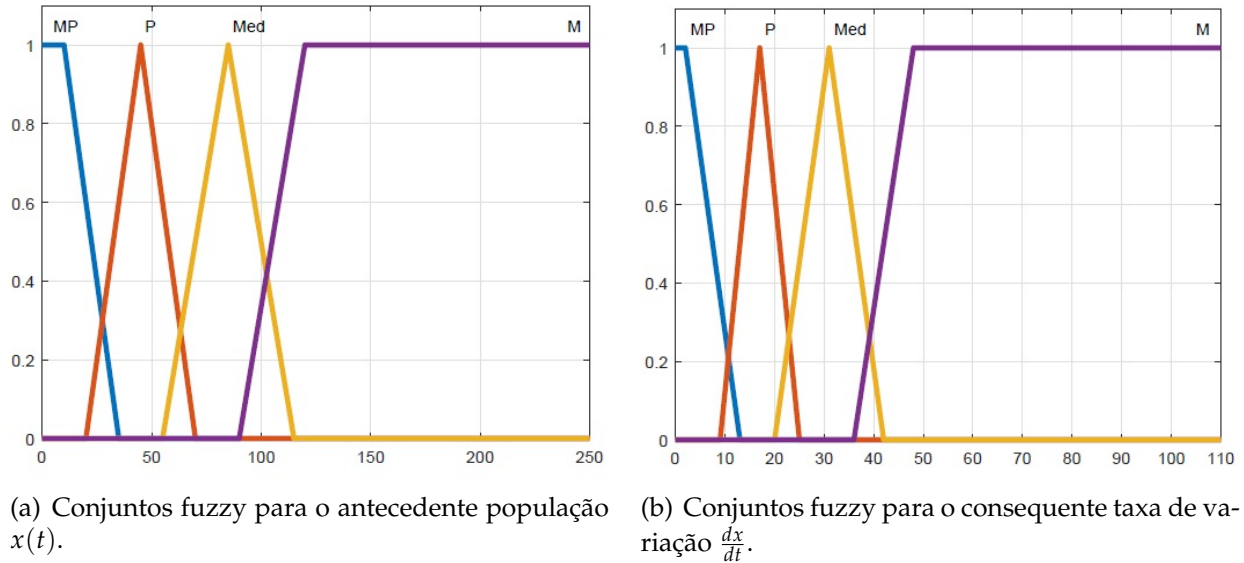


Figura 29: Conjuntos fuzzy para o antecedente (Subfigura 29(a)) e consequente (Subfigura 29(b)).

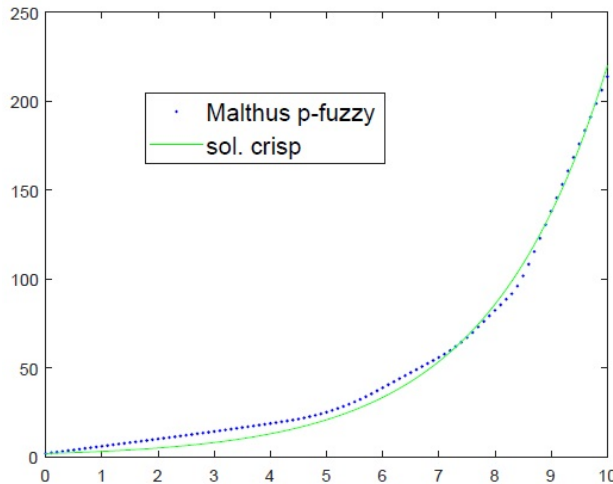


Figura 30: Soluções do modelo de Malthus via sistema p-fuzzy (linha pontilhada em azul) e via EDO (linha em verde). Os parâmetros utilizados foram $h = 0,1$, $x_0 = 2$ e $\lambda = 0,47$.

4 Aplicações

Neste capítulo vamos apresentar aplicações de sistemas p-fuzzy em diversos modelos na área de biomatemática, química e economia. A Seção 4.1 trata especificamente dos modelos de Verhulst (também conhecido como logístico), tanto na versão discreta como contínua, via sistemas p-fuzzy. Na Seção 4.2 apresentamos uma aplicação do tipo presa-predador, introduzida por Lotka-Volterra. Na Seção 4.3 tratamos do famoso problema epidemiológico SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado). Já na Seção 4.4 trazemos uma aplicação na área de química para investigar o comportamento da dinâmica de reações

químicas consecutivas. Na Seção 4.5 apresentamos uma aplicação no modelo econômico de Goodwin. Por fim, na Seção 4.6 trazemos uma breve discussão sobre equilíbrio e estabilidade de sistemas p-fuzzy.

4.1 Modelos populacionais com única população e limitação de recursos

O primeiro modelo matemático populacional que se conhece é o de Malthus, visto anteriormente. Esse é um modelo que não pressupõe algum tipo de limitação (por espaço, alimentos, recursos em geral) e isso faz com que a população cresça exponencialmente. Vimos esse comportamento tanto a partir da solução do PVI (12), como a partir da metodologia p-fuzzy.

A seguir apresentamos o modelo populacional com limitação de recursos. O estudo completo desse caso pode ser encontrado em [4, 12] na versão contínua, e em [26] na versão discreta.

4.1.1 Estudo do Modelo p-fuzzy de Verhulst

Em geral (na versão discreta ou contínua), o modelo de Verhulst (também conhecido como logístico) tem como hipótese que, devido à limitação de recursos, há competição entre os indivíduos [6]. Como veremos, essa hipótese requer um “ajuste” no modelo de Malthus.

Começamos com o modelo de Verhulst, versão discreta via sistemas p-fuzzy em modelos populacionais, com única população como é o de Verhulst.

- Caso discreto:

O modelo populacional discreto de Verhulst é descrito pela equação de diferenças logística

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad (14)$$

em que a variável x_n é a densidade populacional da n -ésima geração. Esse modelo apresenta um comportamento complexo em relação ao parâmetro λ , incluindo bifurcações e caos [6, 26].

Vamos fazer um resumo do estudo de (14) via teoria clássica de equações a diferenças. O único estado estacionário da Equação (14) é dada por

$$\bar{x} = 1 - \frac{1}{\lambda}, \quad (15)$$

que é assintoticamente estável se $1 < \lambda < 3$. Para $\lambda > 3$, o modelo logístico discreto apresenta uma sequência de bifurcações, levando a uma dinâmica complexa.

Aqui focamos em três casos especiais:

- i) Se $\lambda \in (1, 2)$, então o estado estacionário em (15) é um atrator global e a sequência dada por (14) converge monotonicamente para \bar{x} (veja a solução analítica dada na Figura 33).

- ii) Se $\lambda \in (2, 3)$, então o estado estacionário em (15) é um atrator global e a sequência (14) converge para \bar{x} , mas não monotonicamente (veja a solução analítica dada na Figura 34).
- iii) Se $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6})$, então o estado é oscilatório de período 2, isto é, a sequência (14) assume apenas dois valores fixos que se alternam, digamos \bar{x}_1 e \bar{x}_2 , dados pelas raízes

$$\bar{x}_1 = \frac{(\lambda + 1) + \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}$$

e

$$\bar{x}_2 = \frac{(\lambda + 1) - \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}.$$

Nesse caso, o ponto fixo \bar{x} é instável (veja a solução analítica dada na Figura 35).

- Análise de (14) via p-fuzzy:

Aqui adotamos um sistema baseado em regras fuzzy e a solução é dada por

$$x_{n+1} = FRBS_f(x_n), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

A solução do sistema (16) é obtida por

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad (17)$$

sendo que a variação da função Δx_n é a saída do controlador fuzzy na k -ésima iteração [26].

Considerando X como a variável de entrada e ΔX a de saída, temos a base de regras típica para modelo logístico.

r_1 : Se X é “baixa” (A_1), então a variação (ΔX) é “baixa positiva” (B_2).

r_2 : Se X é “média baixa” (A_2), então a variação (ΔX) é “média positiva” (B_3).

r_3 : Se X é “média” (A_3), então a variação (ΔX) é “alta positiva” (B_4).

r_4 : Se X é “média alta” (A_4) então a variação (ΔX) é “média positiva” (B_3).

r_5 : Se X é “alta” (A_5) então a variação (ΔX) é “baixa positiva” (B_2).

r_6 : Se X é “muito alta” (A_6) então a variação (ΔX) é “baixa negativa” (B_1).

em que cada conjunto A_i e B_j podem ser vistos nas Figuras 31 e 32.

O estado estacionário \bar{x} é utilizado para simular as soluções das Figuras 33 e 34. Para o caso da Figura 35, em que $\lambda > 3$, temos 2-ciclos. A capacidade suporte X^* é dada pela média entre \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . Com respeito aos consequentes, definimos $L_{sup} = 2 |L_{inf}|$.

No primeiro caso da Figura 33 podemos observar a convergência monôtona e assintótica da solução para $\bar{x} = 1 - \frac{1}{1,9} \approx 0,474$. O segundo caso (Figura 34) ilustra a convergência da solução para $\bar{x} = 1 - \frac{1}{2,8} \approx 0,643$, que se dá de forma oscilatória. Por fim, o terceiro caso

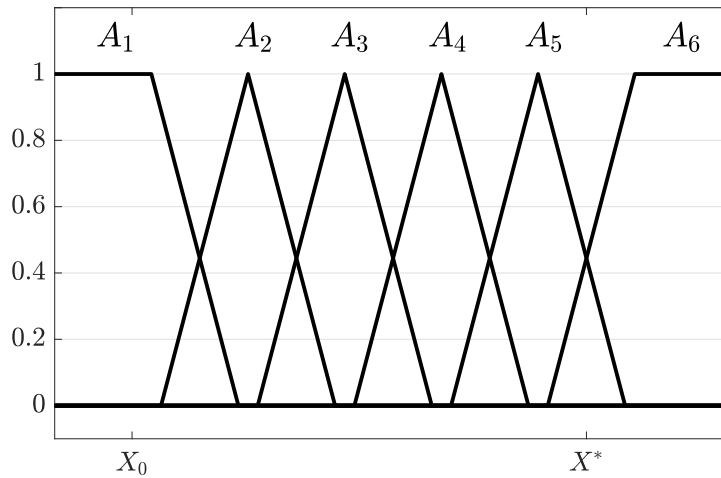


Figura 31: Antecedentes da população X para o modelo logístico, em que X_0 representa a população inicial e X^* a capacidade suporte do meio.

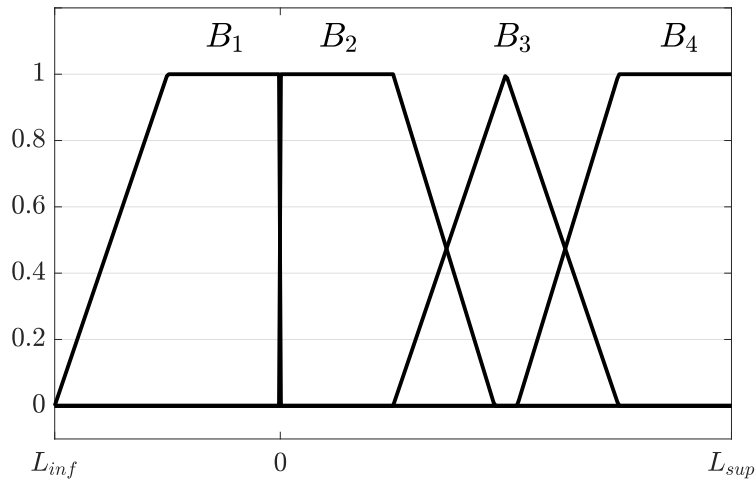


Figura 32: Consequentes da variação ΔX para o modelo logístico, em que $[L_{inf}, L_{sup}]$ representa o intervalo de valores possível para ΔX .

(Figura 35) apresenta a dinâmica de bifurcação, com oscilação de período 2 assumindo os valores $\bar{x}_1 \approx 0,5902$ e $\bar{x}_2 \approx 0,7377$. Assim, cada um dos casos ilustram que o sistema p-fuzzy capta o comportamento dinâmico do caso clássico.

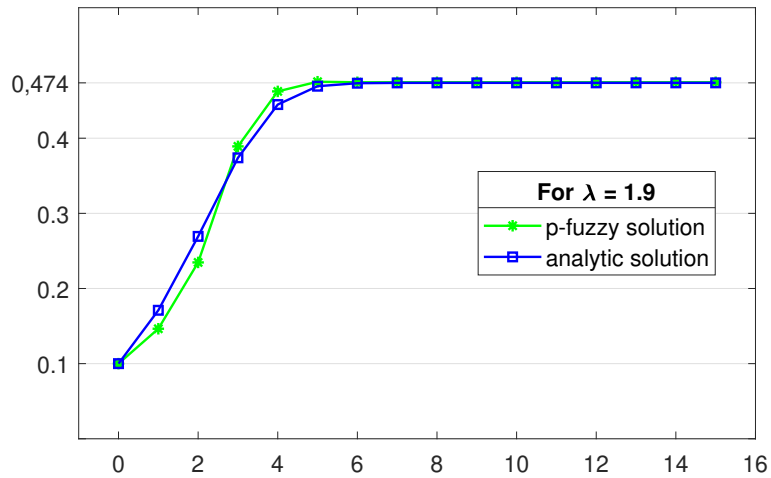


Figura 33: Solução discreta obtida pelo sistema p-fuzzy (17) e solução analítica do modelo logístico (14), para $\lambda = 1,9$ e $\bar{x} \approx 0,474$.

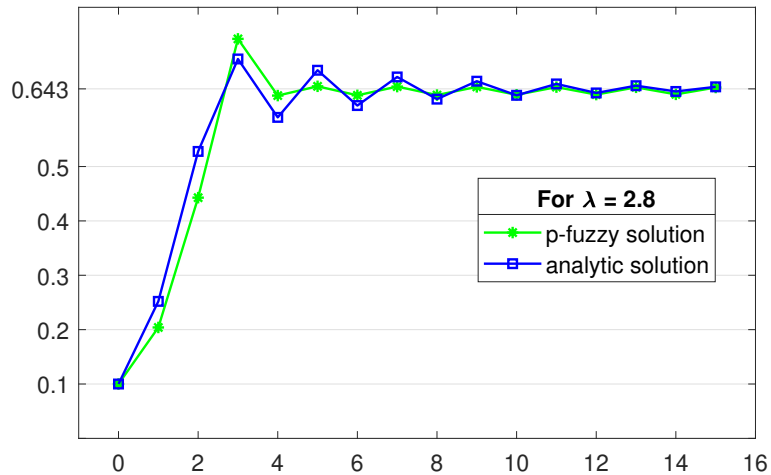


Figura 34: Solução discreta obtida pelo sistema p-fuzzy (17) e solução analítica do modelo logístico (14), para $\lambda = 2,8$ e $\bar{x} \approx 0,643$.

- Caso contínuo:

O modelo tradicional de Verhulst para crescimento populacional é regido pelo seguinte PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (18)$$

onde a é a razão de crescimento intrínseca e K é a capacidade suporte.

As soluções clássicas de (18), que representam as populações $x(t)$ em cada instante t , são dadas por

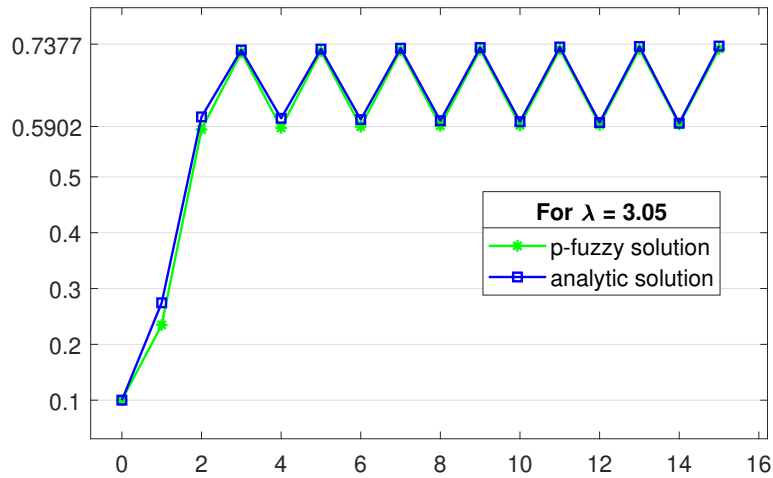


Figura 35: Solução discreta obtida pelo sistema p-fuzzy (17) e solução analítica do modelo logístico (14), para $\lambda = 3,05$, $\bar{x}_1 \approx 0,5902$ e $\bar{x}_1 \approx 0,7377$.

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-at} + 1}. \quad (19)$$

Logo,

$$\begin{cases} x \text{ é crescente se } x_0 < K \\ x \text{ é constante se } x_0 = K \\ x \text{ é decrescente se } x_0 > K \end{cases},$$

e tem a forma representada na Figura 36.

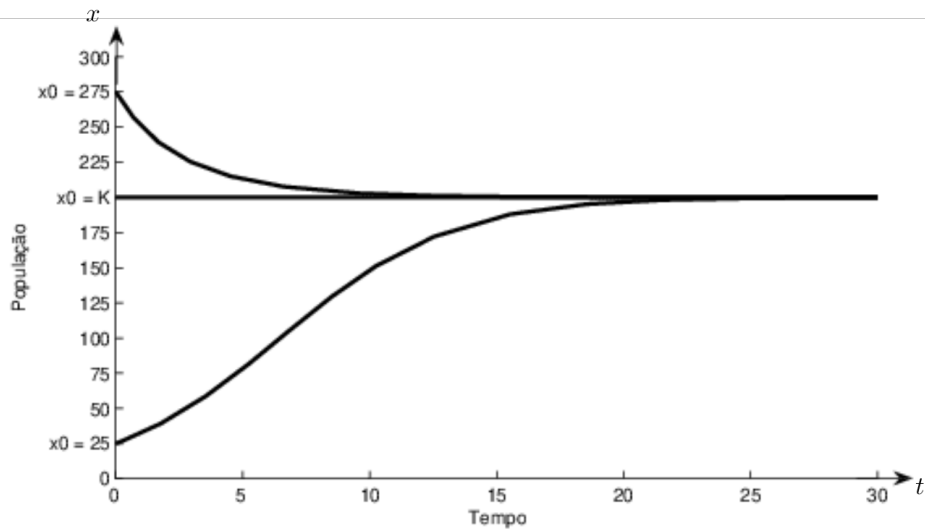


Figura 36: Trajetórias do modelo contínuo de Verhulst com capacidade suporte $K = 200$ e condições iniciais $x_0 = 25$, $x_0 = 200$ e $x_0 = 270$.

- Solução via p-fuzzy:

No p-fuzzy não precisamos conhecer explicitamente a expressão (18). Aqui ela é apresentada apenas com a finalidade de comparar as propriedades qualitativas das trajetórias clássicas com as produzidas pelo sistema p-fuzzy contínuo.

Modelo de Verhulst p-fuzzy via Mamdani e Larsen

Para traçarmos um paralelo nas formulações das regras fuzzy com o modelo clássico, analisaremos

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a \left(1 - \frac{x}{k}\right) = f(x), \quad (20)$$

em que f é afim.

Note que a Equação (20) está escrita em função da taxa de crescimento específico. Esta formulação facilita a elaboração das regras do sistema p-fuzzy. A “construção” das regras a partir da variação percentual por unidade de tempo pode, em alguns casos, ser mais intuitiva que a formulação a partir das variações absolutas.

Apenas para efeito de notação, denotaremos X para a população (entrada) e $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ (saída) para a taxa de crescimento relativa por unidade de tempo (ou taxa de crescimento específico).

De acordo com a Equação (20), temos que as regras para a variação específica devem “decrecer” com x . O suporte da saída deve estar entre -0,2 e 1.

R_1 : Se (X) é “muito baixa” (A_1) então a $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é “alta positiva” (B_1)
R_2 : Se (X) é “baixa” (A_2) então a $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é “alta positiva” ($B_2 = B_1$)
R_3 : Se (X) é “média” (A_3) então a $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é “média positiva” (B_3)
R_4 : Se (X) é “média alta” (A_4) então a $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é “média positiva” ($B_4 = B_3$)
R_5 : Se (X) é “alta” (A_5) então a $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é “baixa positiva” (B_5)
R_6 : Se (X) é “altíssima” (A_6) então a $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é “baixa negativa” (B_6)

Tabela 2: Regras para o modelo fuzzy (20).

As Figuras 37 e 38 ilustram os conjuntos fuzzy dos antecedentes e consequentes da Tabela 2. A implementação deste exemplo utilizando a biblioteca Simpful [30] do Python pode ser vista no Apêndice A.4 deste livro.

Para efeito de ilustração optamos pelo método numérico de Euler para obter a solução via p-fuzzy (para a função $SBRF_f(x_n)$) e chegamos:

$$x_{n+1} = x_n + hx_n SBRF_f(x_n),$$

cuja representação gráfica pode ser vista na Figura 39 com passo $h = 0,001$.

As regras da Tabela 2 estão de acordo com as principais características de um modelo geral de população com crescimento inibido que seja regulado por uma capacidade suporte.

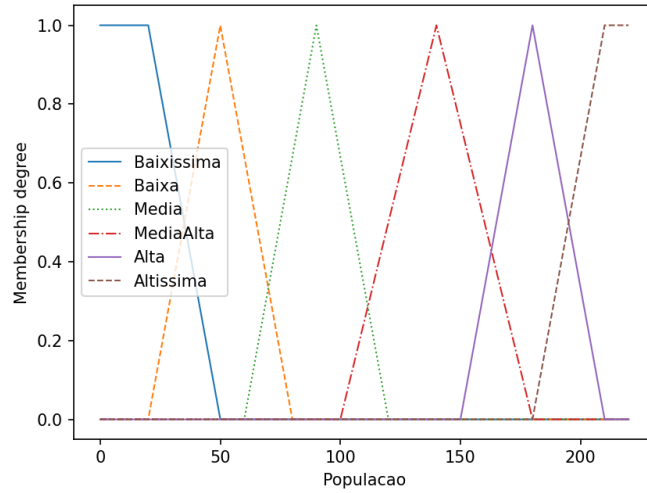


Figura 37: Funções de pertinência da população X.

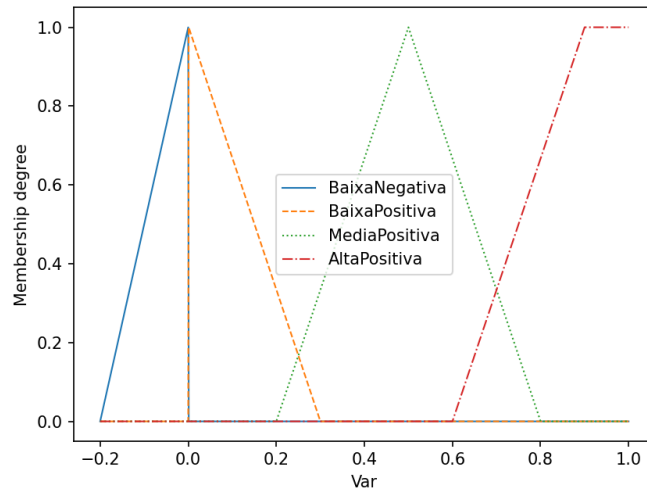


Figura 38: Funções de pertinência da variação específica $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$.

O modelo de Verhulst é um caso particular. Além desse, com pequenas modificações, a mesma base de regras poderia servir para os modelos inibidos de Gompertz, de Montroll, de von Bertalanffy, etc [3].

A Figura 40 apresenta a trajetória do modelo p-fuzzy contínuo de Verhulst pelo método de inferência de Larsen (veja Equação (9)), através do software MatLab [17]. Para essa simulação foram consideradas as mesmas funções de pertinência para a entrada (veja Figura 37) e saída (veja Figura 38) do caso do método de Mamdani, bem como a base de regras (veja a Tabela 2). A Figura 40 também ilustra a comparação das trajetórias obtidas pelos métodos de Mamdani (linha preta contínua) e Larsen (linha preta tracejada).

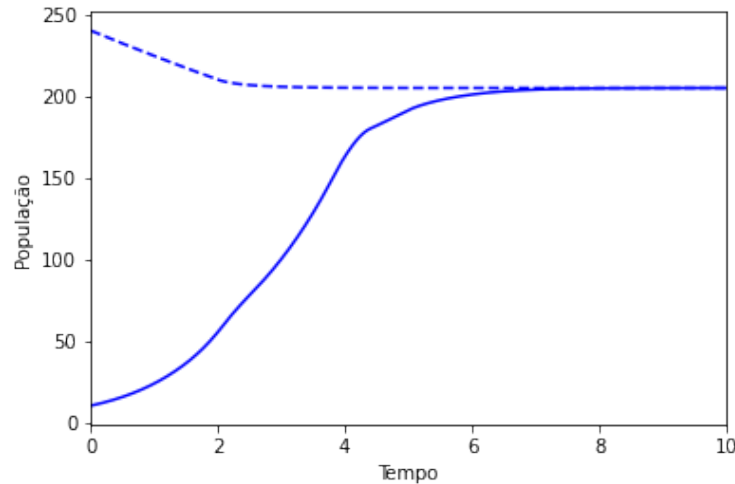


Figura 39: Trajetória do modelo p-fuzzy contínuo referente a Tabela 2. Curva contínua com $x_0 = 10$ e curva tracejada com $x_0 = 240$.

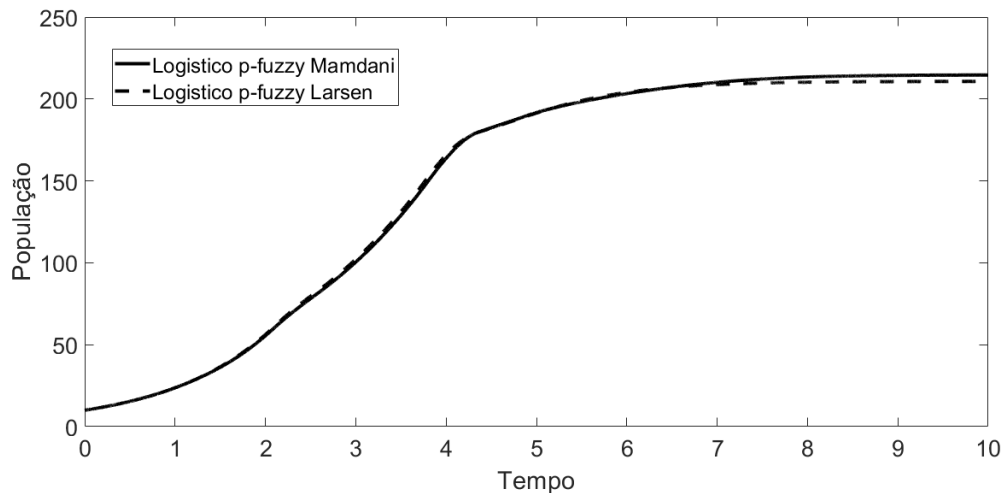


Figura 40: Trajetória do modelo p-fuzzy contínuo com $x_0 = 10$ através do método de inferência fuzzy de Larsen (linha tracejada) e Mamdani (linha contínua).

Modelo de Verhulst p-fuzzy via Takagi-Sugeno

Para o controlador do tipo Takagi-Sugeno, que às vezes fornece explicitamente a função saída (veja Exemplo 11) a metodologia p-fuzzy pode se tornar redundante já que, neste caso o PVI clássico é equivalente ao p-fuzzy, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = SBRF(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

onde f é a função que sai do controlador. Para ilustrar essa observação, vamos usar usar controlador Takagi-Sugeno no modelo de Verhulst (logístico).

Considere a seguinte base de regras:

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é pequeno } (A_1), \text{ então } f_1 = \frac{x}{2} \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é grande } (A_2), \text{ então } f_2 = \frac{1-x}{2} \end{cases} ,$$

onde

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} .$$

A variação $\frac{dx}{dt} = f(x)$ obtida pelo sistema de inferência Takagi-Sugeno é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\varphi_{A_1}(x)\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_{A_2}(x)\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\varphi_{A_1}(x) + \varphi_{A_2}(x)} \\ f(x) &= (1-x)\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1-x}{2}\right)(x) \\ f(x) &= x - x^2 = x(1-x). \end{aligned} \tag{21}$$

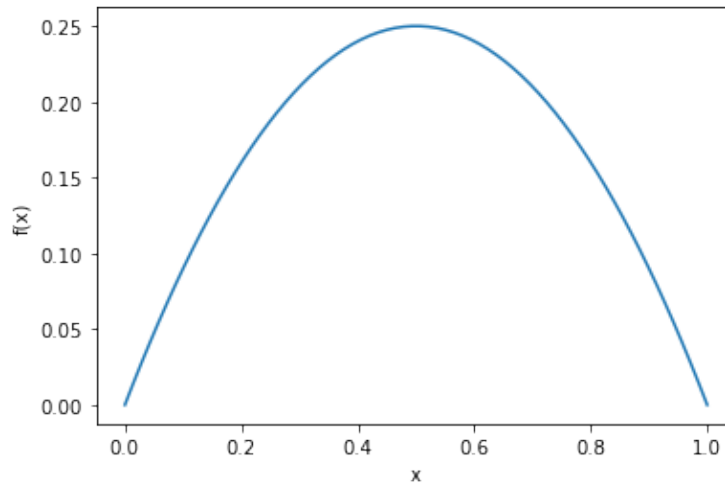


Figura 41: Função (21) obtida pelo método de inferência Takagi-Sugeno.

A Figura 41 ilustra a variação obtida pelo método de inferência de Takagi-Sugeno. Usando o método numérico de Euler, obtemos a curva apresentada na Figura 42 como solução do p-fuzzy.

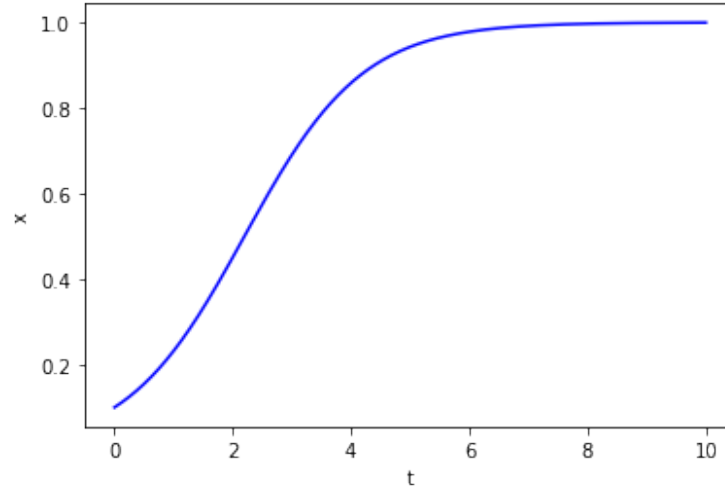


Figura 42: Solução do modelo de Verhulst via p-fuzzy com o método de inferência de Takagi-Sugeno.

4.2 Modelos com várias variáveis de entrada e várias de saída

A mesma técnica utilizada no caso unidimensional pode ser estendida para o caso n -dimensional. Por exemplo, considerando um PVI bidimensional dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = SBRF_f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = SBRF_g(x, y), \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ y(a) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (22)$$

o método de Euler pode ser novamente utilizado, considerando como saída as **taxas específicas de variação**, obtendo as estimativas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \cdot SBRF_f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot SBRF_g(x_n, y_n), \end{aligned}$$

onde h é o passo e $SBRF_f, SBRF_g$ são as aplicações (saídas) produzidas pelo controlador fuzzy.

4.2.1 Modelo presa-predador de Lotka-Volterra

Por volta de 1925, Lotka e Volterra desenvolveram um dos modelos matemáticos de mais largo uso e de destacada importância para representar interações entre presas e seus predadores. Tal modelo é conhecido como Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra [13, 6].

O modelo criado por Volterra foi bem aceito por explicar as alterações observadas nas populações de pescadas e tubarões no Mar Adriático, por ocasião da paralisação das atividades pesqueiras devido à I Guerra Mundial e posterior retomada, quando do término da guerra.

O modelo presa-predador clássico de Lotka-Volterra pressupõe que:

1. Tanto as presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num mesmo habitat, ou seja, todos os predadores têm a mesma chance de encontrar cada presa;
2. O encontro entre os elementos das duas espécies seja ao acaso, a uma taxa proporcional ao tamanho das duas populações, já que quanto maior o número de presas, mais fácil será encontrá-las e quanto mais predadores, maior o número de ataques;
3. A população de presas cresce exponencialmente na ausência de predadores (crescimento ilimitado por escassez de predadores);
4. A população de predadores decresce exponencialmente na ausência de presas (decréscimo por escassez de alimento);
5. A população de predadores é favorecida pela abundância de presas;
6. A população de presas é desfavorecida pelo aumento de predadores.

Estas seis hipóteses são resumidas nas equações abaixo, denominadas Modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} . \quad (23)$$

As variáveis de estado x e y são, respectivamente, quantidade de presas e quantidade de predadores em cada instante t .

Os parâmetros representam:

- a : taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores;
- $\frac{\alpha}{\beta}$: a eficiência de predação, isto é, a eficiência de conversão de uma unidade de massa de presas em uma unidade de massa de predadores, já que α representa a proporção de sucesso dos ataques dos predadores e β a taxa de conversão de biomassa das presas em predadores;
- b : taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas;
- x_0 e y_0 : populações iniciais.

A solução clássica do problema pode ser vista na Figura 43.

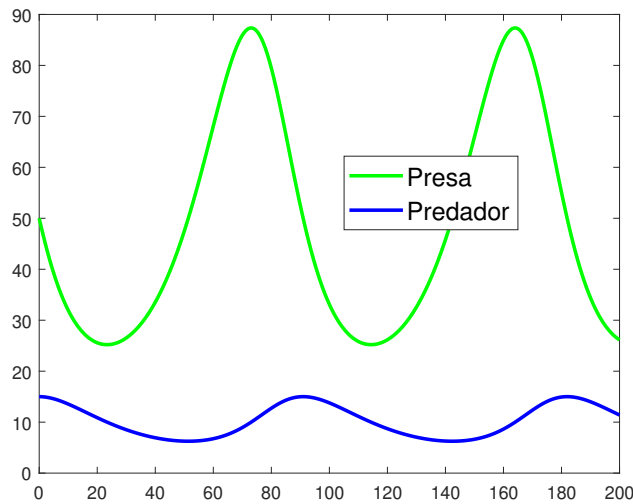


Figura 43: Modelo presa-predador com $a = 0,1$, $\alpha = 0,01$, $b = 0,05$, $\beta = 0,001$, $x_0 = 50$ e $y_0 = 15$.

Os pontos críticos do sistema (23) são: $(0,0)$, um ponto de sela instável, e $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ que é um centro estável. O caráter cíclico das soluções explica as flutuações observadas experimentalmente em população de presas e predadores.

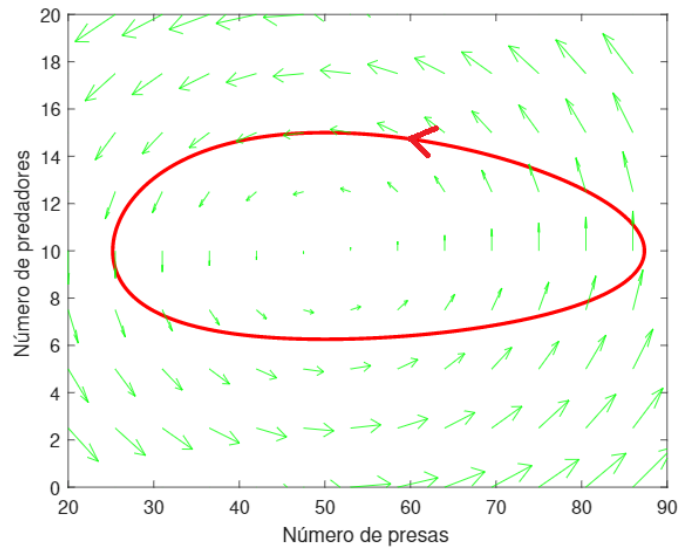


Figura 44: Plano de fase do modelo de Lotka-Volterra (23).

- Modelo Presa-predador p-fuzzy:

Apresentamos anteriormente as hipóteses de Lotka-Volterra que caracterizam um modelo presa-predador, cujos contingentes populacionais oscilam com o tempo. Isso vem ao encontro de observações empíricas nestes ecossistemas. Os resultados, coerentes com o

fenômeno estudado, fizeram com que o modelo de Lotka-Volterra, embora teórico, tenha se tornado um paradigma para os modelos do tipo presa-predador.

Procuramos modelar a principal característica de um sistema presa-predador, isto é, as presas favorecem o crescimento dos predadores e são desfavorecidas por eles. Como consequência, o plano de fase apresenta trajetórias que oscilam. Aqui queremos ir além disso.

Como em [3], por meio de um sistema p-fuzzy bidimensional contínuo, reproduzimos um plano de fase semelhante ao do modelo contínuo de Lotka-Volterra, em que as trajetórias são ciclos (ver Figura 44). Para isto é necessário reinterpretarmos as seis hipóteses comentadas acima:

1. dentro de cada espécie, o ambiente não privilegia nenhum indivíduo. Portanto é natural que as variáveis de estado sejam apenas quantidades;
2. há interação entre as espécies;
3. não há autoinibição nas presas, isto é, para um dado número de predadores, o crescimento específico das presas é constante, podendo ser positivo ou negativo;
4. como em “3.”, para um dado número de presas, o crescimento específico dos predadores seja constante, podendo ser positivo ou negativo;
5. o crescimento específico dos predadores aumenta com o número de presas;
6. o crescimento específico das presas diminui com o aumento dos predadores.

Resumidamente, as hipóteses de “3” a “6” indicam que, a interação é típica de presa-predador e que, mantendo-se uma espécie constante, a outra tem crescimento (decréscimo) malthusiano, isto é, tem crescimento específico constante.

Considerando as observações acima, temos como objetivo elaborar uma base de regras fuzzy que “substitua” as Equações (23), para modelar a dinâmica entre as presas e os predadores, por meio de um modelo p-fuzzy contínuo de Lotka-Volterra.

Como no caso unidimensional, temos as variáveis linguísticas de entrada: quantidade de presas (X) e quantidade de predadores (Y), e duas variáveis de saída: variação relativa da quantidade de presas por unidade de tempo, denotada por $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$, que é o crescimento específico das presas; e variação relativa da quantidade de predadores por unidade de tempo, denotada por $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ – crescimento específico dos predadores. A Figura 45 representa um esquema do modelo.

Os valores assumidos pela variável X são: *baixa* (A_1), *média baixa* (A_2), *média alta* (A_3) e *alta* (A_4) e pela variável Y são *baixa* (B_1), *média baixa* (B_2), *média alta* (B_3) e *alta* (B_4).

Ambos os crescimentos específicos, $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$, assumirão os valores *alto positivo* (P_2), *baixo positivo* (P_1), *baixo negativo* (N_1) e *alto negativo* (N_2).

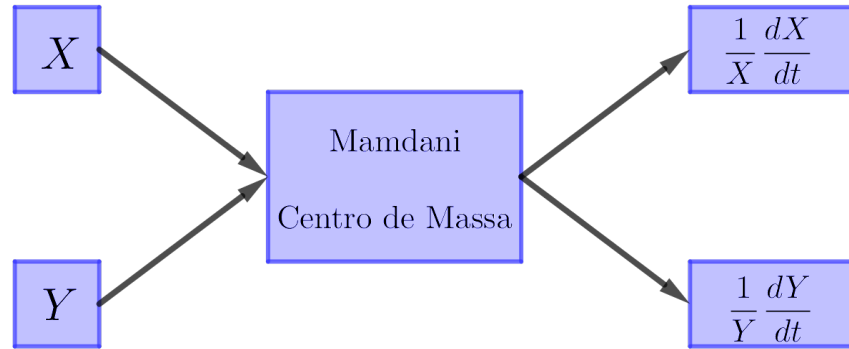


Figura 45: Sistema baseado em Regras Fuzzy para (23).

Os antecedentes e consequentes usados aqui estão representados nas Figuras 46 e 47.

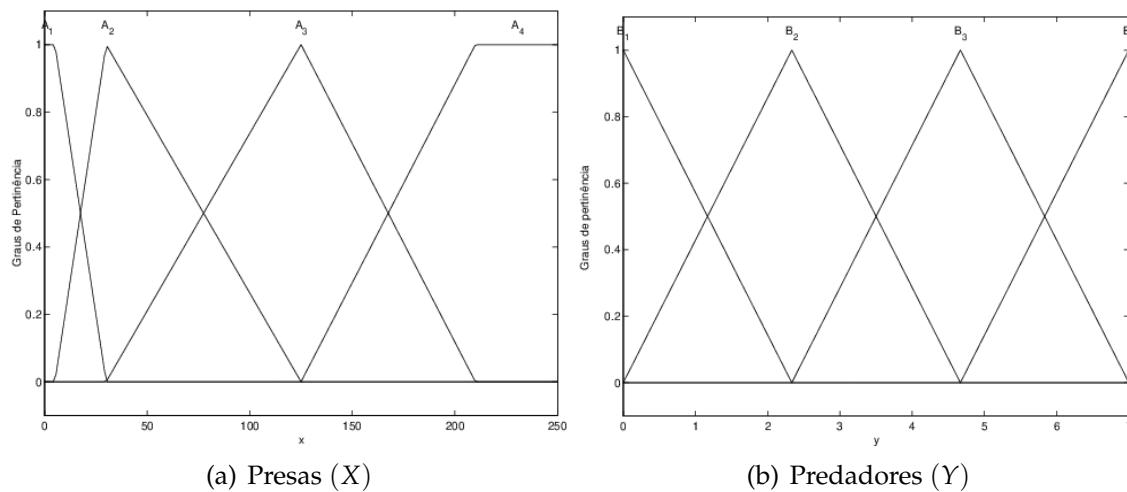


Figura 46: Funções de pertinência dos antecedentes.

No esquema acima (Figura 45), a base de conhecimentos é traduzida por um conjunto de regras fuzzy que desempenham o papel do campo de direções.

A partir das seis reinterpretações para as hipótese de Lotka-Volterra feitas acima propomos a base de regras fuzzy da Tabela 3.

A Figura 48 ilustra a base de regras (Tabela 3), em que as setas horizontais representam as magnitudes e sentidos de $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ e as verticais representam $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$. De forma semelhante às regras para o modelo de Verhulst, aqui também valem

“dado o valor de uma variável, a taxa específica da outra é constante.”

Nós apresentamos a Figura 48 para traçarmos um paralelo com a representação do campo de direções de equações diferenciais clássicas. Apenas em título de curiosidade e para nos convenceremos mais sobre o poder da metodologia p-fuzzy, a base de regras de fato “gera” um campo clássico de direções para uma E.D.O.

Se X é A_1 e Y é B_1 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_1 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_1 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_1 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_2
Se X é A_1 e Y é B_2 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_2 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_2 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_2 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_2
Se X é A_1 e Y é B_3 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_3 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_3 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_3 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_2
Se X é A_1 e Y é B_4 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_4 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_4 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_4 então $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ é P_2

Tabela 3: Regras fuzzy para o modelo presa-predador.

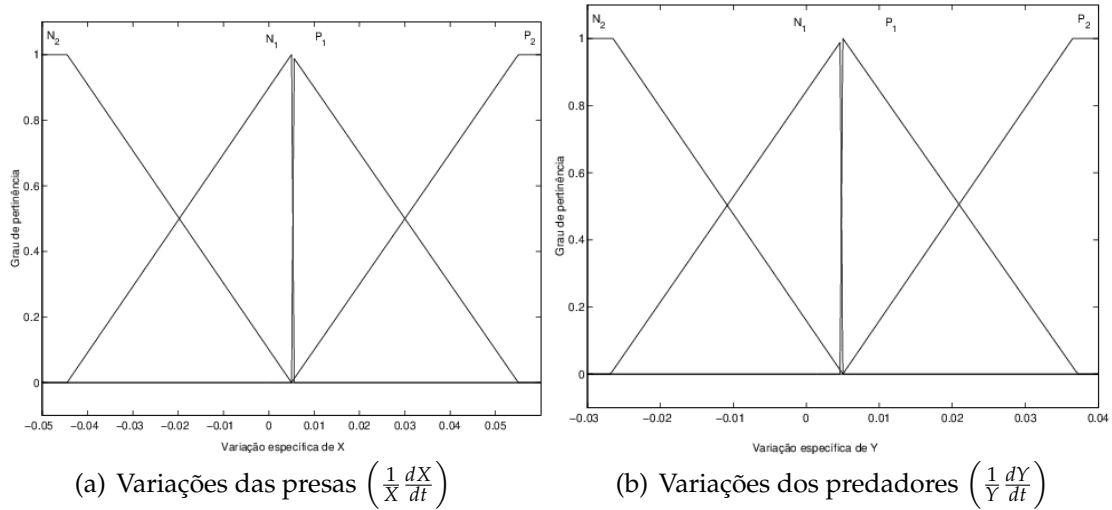


Figura 47: Funções de pertinência dos consequentes.

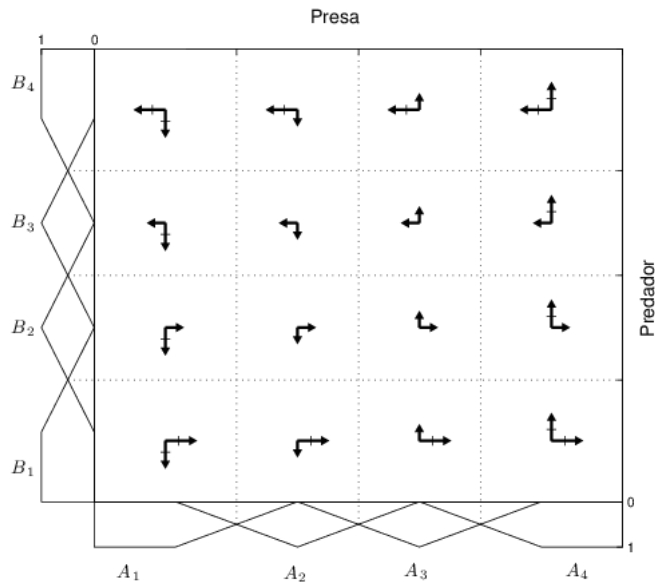


Figura 48: Representação gráfica das regras da Tabela 3 na forma de vetores de direções.

Utilizando o Método de Inferência de Mamdani e a defuzzificação do Centro de Gravidade obtemos os valores $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$.

Como as saídas são $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$, devemos multiplicá-las pelas entradas x e y , respectivamente, para obter $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$. Assim, em cada instante t , o número de presas e de predadores

são estimados por algum método numérico, como o de Euler, na seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h x_n SBRF_f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h y_n SBRF_g(x_n, y_n) \end{cases} . \quad (24)$$

Resultados:

As simulações das trajetórias produzidas pelo sistema p-fuzzy acima seguem os passos:

- Para começar o processo, adotamos os valores $x_0 = 100$, $y_0 = 3$, $h = 0,1$ e $t_0 = 0$.
- Dados iniciais para o controlador fuzzy: a população de presas x_0 e a de predadores y_0 ;
- As saídas fornecidos pelo controlador fuzzy, multiplicadas pelas entradas, fornecem os valores: $x_0 SBRF_f(x_0, y_0)$ e $y_0 SBRF_g(x_0, y_0)$;
- Por (24), encontramos x_1 e y_1 ;
- x_1 e y_1 são os novos valores de entrada do controlador e assim sucessivamente.

Usando as Equações (24), obtemos a solução via sistema p-fuzzy que pode ser vista na Figura 49. O plano de fase obtido pelo sistema p-pfuzzy pode ser visto na Figura 50

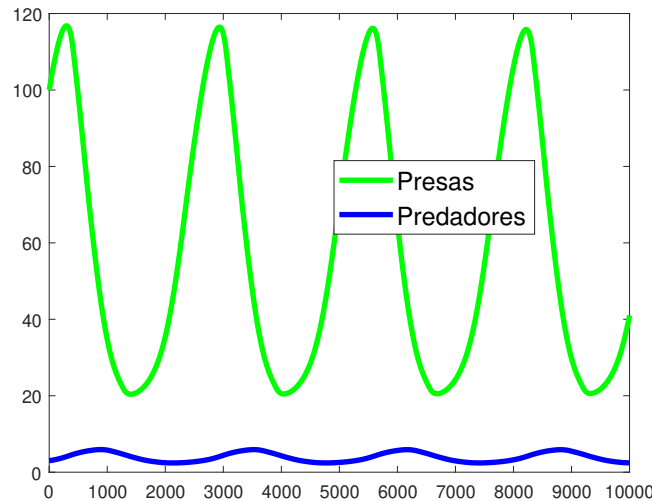


Figura 49: Solução para o modelo de presa-predador via p-fuzzy, cujos parâmetros são $x_0 = 100$, $y_0 = 3$, $h = 0,1$ e $t_0 = 0$.

Com os dados iniciais adotados acima e o sistema p-fuzzy dado pelas regras da Tabela 3, combinadas com o sistema (24), é possível concluir que o ponto de equilíbrio é $P_e = (77,5; 3,5)$. Claro que outros métodos numéricos, como os de Runge-Kutta, podem ser adotados para estimar $x(t)$ e $y(t)$.

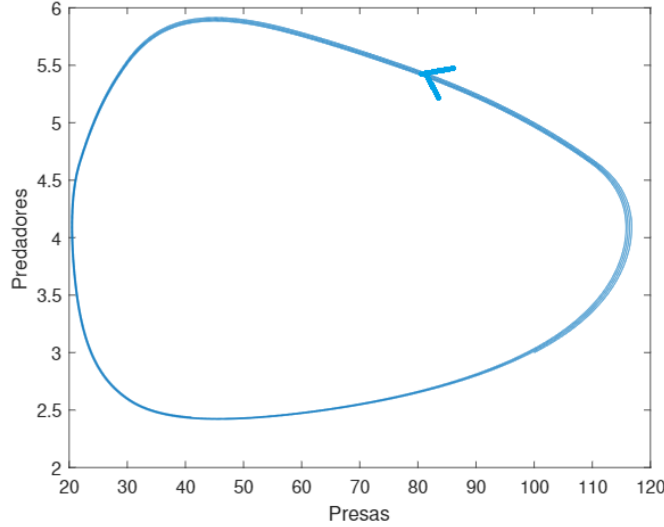


Figura 50: Plano de fase do sistema p-fuzzy para $x_0 = 100$ e $y_0 = 3$.

Se estivéssemos interessados em encontrar os parâmetros de um modelo de Lotka-Volterra clássico para produzir as trajetórias representadas na Figura 44, poderíamos comparar as coordenadas de P_e com as do equilíbrio teórico, $P = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, para obter relações entre a, b, α e β . Daí, usar ajustes para, finalmente encontrar cada um desses parâmetros.

O primeiro trabalho que se utiliza dos sistemas p-fuzzy contínuos para descrever interações entre pulgões e joaninhas foi no controle biológico de uma doença chamada Morte Súbita dos Citros [23]. O pulgão, supostamente hospedeiro do vírus causador da morte súbita, é a presa e a Joaninha, que se alimenta do pulgão, é o predador. Neste sistema presa-predador o modelo p-fuzzy pressupõe inibição em ambas populações. Portanto as regras devem levar isso em conta, de maneira que as trajetórias deixam de apresentar um caráter cíclico para apresentar ciclos limites. Tal modelo p-fuzzy apresenta propriedades qualitativas coincidentes com as do modelo clássico de Holling–Tanner. A partir daí, um estudo a respeito da estabilidade e ajustes de parâmetros desse modelo foi feito.

4.3 Modelo Epidemiológico SIR

Esse é um dos primeiros modelos epidemiológicos conhecido, proposto em 1927 por Kermack e MC Kendrick [13], alguns anos após a ferosa epidemia da gripe espanhola de 1918.

O modelo matemático determinístico é dado pelo conjunto de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = -\gamma I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\beta I \\ \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} = \beta S - \gamma \\ \frac{dR}{dt} = -\gamma I \end{cases} \quad (25)$$

onde S, I e R representam os números de suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente. Os parâmetros β e γ representam as taxas de contato e recuperação, respectivamente.

As equações acima pressupõe que o modelo SIR é sem dinâmica vital e a população total (N) é constante, onde $N = S + I + R$.

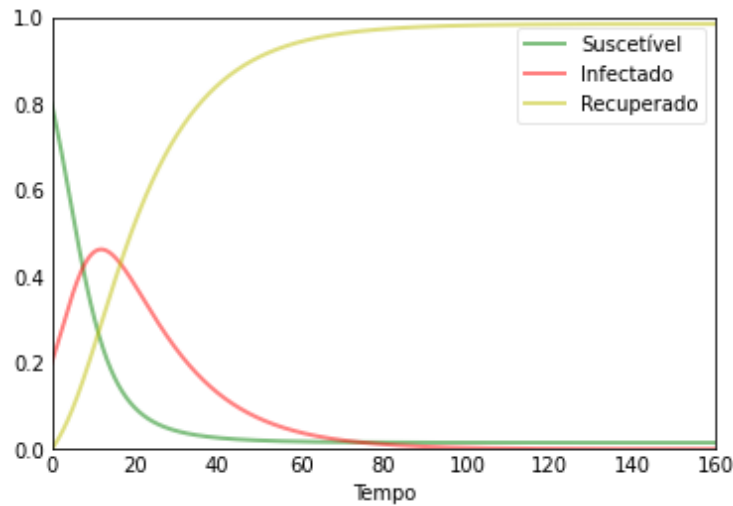


Figura 51: Solução do modelo SIR clássico.

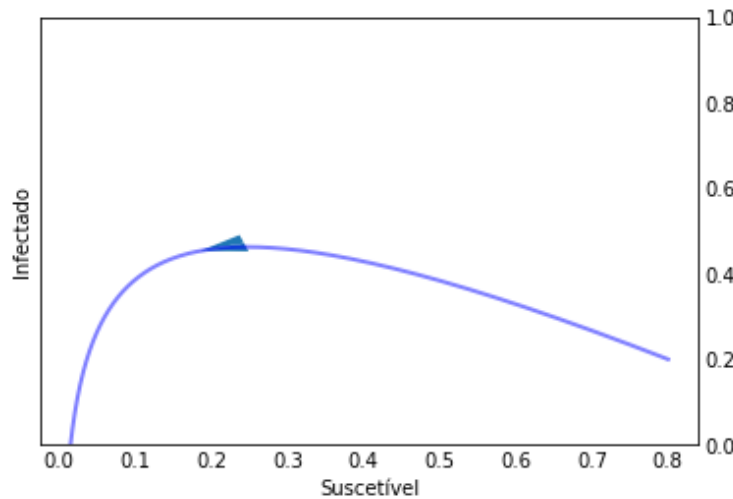


Figura 52: Plano de fase do modelo clássico SIR.

Na Figura 51 vemos as curvas das proporções de suscetíveis, infectados e recuperados do modelo (25), com $\beta = 0.27$ e $\gamma = 1/15$. Na figura 52 apresentamos o plano de fase do modelo (25).

- SIR via p-fuzzy

Para o modelo p-fuzzy vamos estudar apenas as primeiras duas equações. O número de recuperados será obtido separadamente substituindo I na terceira equação.

Nas primeiras duas equações cada variação específica depende da outra. Assim, para cada I fixo, $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ também é fixo. Consequentemente, para cada S fixo, $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é fixo.

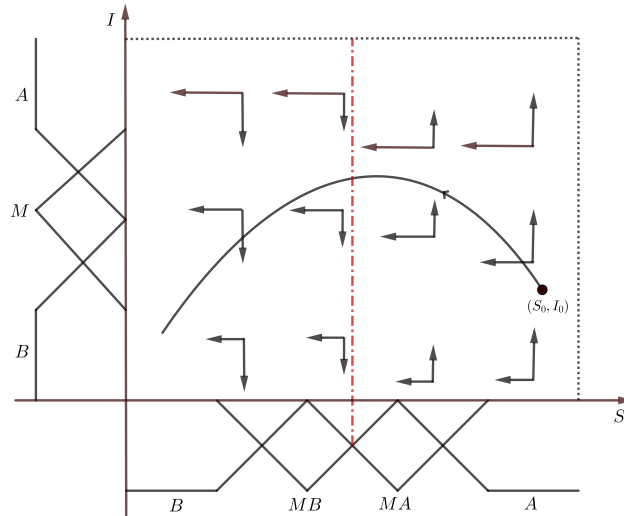


Figura 53: Representação gráfica da base de regras na forma de vetores de direções.

A base de regras é baseada nas taxas específicas de variação por unidade de tempo, indicadas por $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$, dependendo da população S e I , respectivamente. Portanto, S e I são os valores das variáveis de entrada, enquanto $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ são os valores da variável de saída.

Na Figura 53 apresentamos uma representação gráfica da base de regras na forma de vetores de direções e na Tabela 4 apresentamos a base de regras do nosso sistema.

Como dito anteriormente, o nosso sistema terá duas entradas (proporções de suscetíveis e infectados) e duas saídas (variação específica de suscetíveis e infectados).

Para as variáveis de entrada, temos os seguintes conjuntos fuzzy:

- Suscetíveis: *Alto (A)*, *Médio Alto (MA)*, *Médio Baixo (MB)* e *Baixo (B)*.
- Infectados: *Alto (A)*, *Médio (M)* e *Baixo (B)*.

Para as variáveis de saída, temos os seguintes conjuntos fuzzy:

- Variação Suscetíveis: *Alta Negativa (AN)*, *Média Negativa (MN)* e *Baixa Negativa (BN)*.
- Variação Infectados: *Alta Negativa (AN)*, *Média Negativa (MN)*, *Baixa Negativa (BN)*, *Alta Positiva (AP)* e *Baixa Positiva (BP)*.

Na Figura 54 apresentamos os conjuntos fuzzy dos antecedentes e na Figura 55 apresentamos os conjuntos fuzzy dos consequentes das regras fuzzy. Ambas figuras foram produzidas utilizando a biblioteca Scikit-Fuzzy [28] do Python.

Utilizando o Método de Mamdani e a defuzificação de Centro de Gravidade obtemos os valores de $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$.

Se S é A e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é BN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é AP
Se S é A e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é MN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é AP
Se S é A e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é AN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é AP
Se X é MA e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é BN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BP
Se S é MA e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é MN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BP
Se S é MA e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é AN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BP
Se S é MB e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é BN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BN
Se S é MB e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é MN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BN
Se S é MB e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é AN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BN
Se S é B e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é BN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é AN
Se S é B e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é MN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é MN
Se S é B e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é AN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é AN

Tabela 4: Regras fuzzy para o modelo SIR.

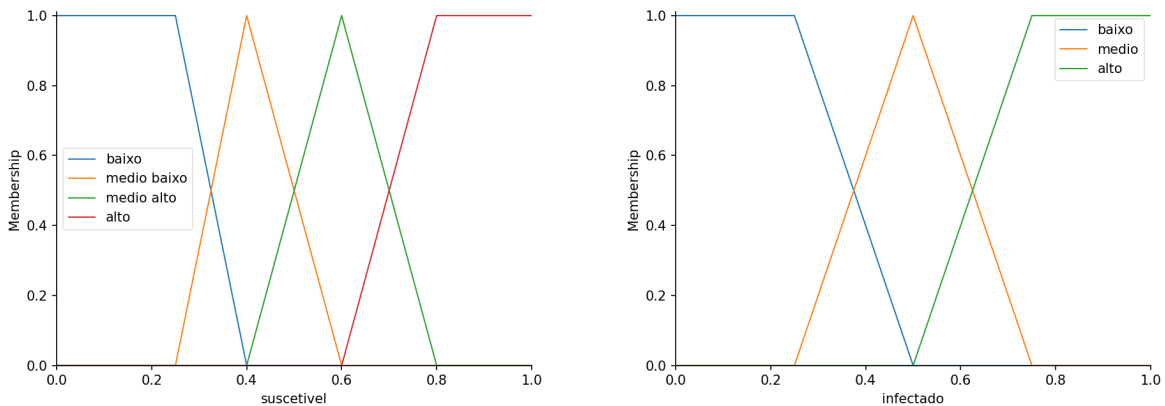


Figura 54: Conjuntos fuzzy nos antecedentes.

Como as saídas são $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$, devemos multiplicá-las pelas entradas S e I , respectivamente, para obter $\frac{dS}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$. Assim, para fins de ilustração, optamos pelo método de Euler

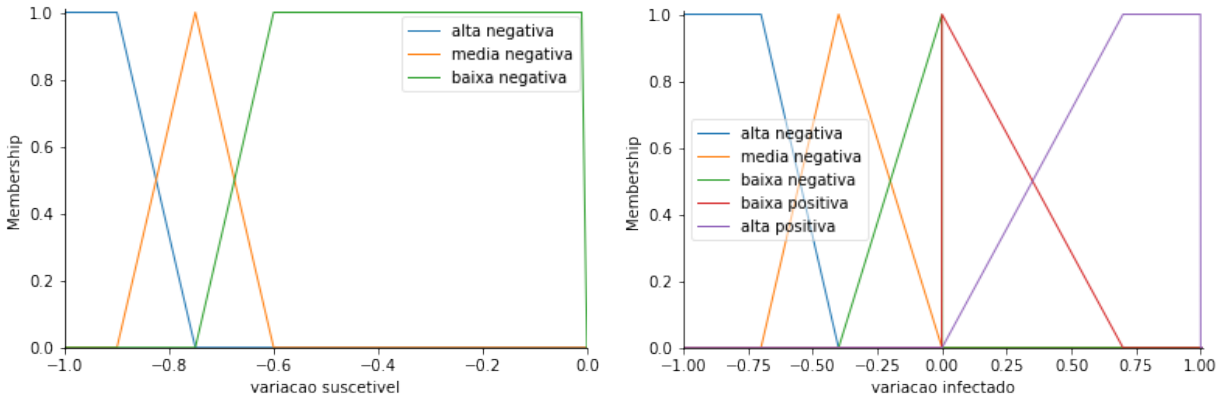


Figura 55: Conjuntos fuzzy nos consequentes.

obtendo as estimativas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + hS_n SBRF_f(S_n, I_n) \\ I_{n+1} &= I_n + hI_n SBRF_g(S_n, I_n) \\ R_{n+1} &= R_n - h[S_n SBRF_f(S_n, I_n) + I_n SBRF_g(S_n, I_n)] \end{aligned}$$

sendo que h é a etapa e $SBRF = (SBRF_f, SBRF_g)$ é a saída produzida pelo controlador fuzzy.

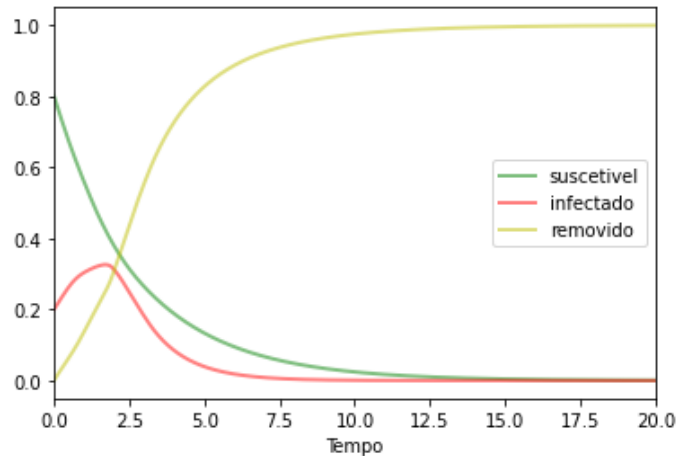


Figura 56: Solução do modelo SIR p -fuzzy com $S_0 = 0,8$, $I_0 = 0,2$ e $R_0 = 0$.

Na Figura 56 apresentamos as curvas de proporção de suscetíveis, infectados e recuperados obtidos via p -fuzzy. Para este caso, usamos o método de Euler com $h = 0,001$, $t_0 = 0$, $S_0 = 0,8$, $I_0 = 0,2$ e $R_0 = 0$. Na Figura 57, vemos o plano de fase do modelo SIR via p -fuzzy.

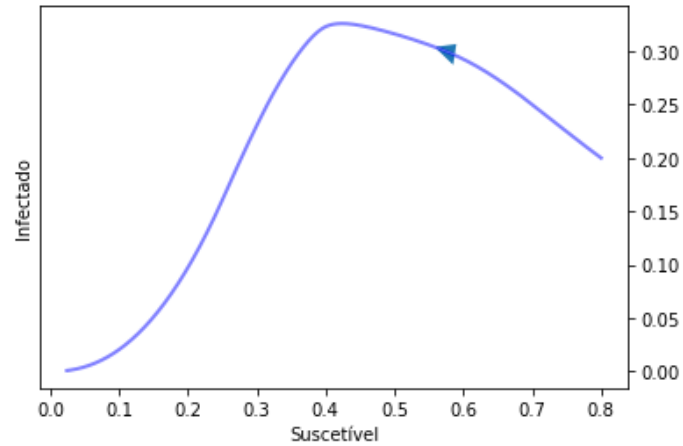


Figura 57: Plano de fase do modelo SIR p -fuzzy com $S_0 = 0,8$, $I_0 = 0,2$ e $R_0 = 0$.

4.4 Modelo de reação química

Reações químicas são dadas basicamente por transformações que envolvem uma ou mais substâncias (reagentes) que resultam em uma nova substância (produto) com diferentes propriedades que as anteriores.

A cinética química trata e interpreta experimentos químicos em termos de modelos matemáticos. A velocidade de uma reação pode ser calculada a partir das concentrações dos reagentes, que podem ser determinadas experimentalmente [27].

Nessa aplicação focamos em um modelo de reação química consecutiva, isto é, reações químicas da seguinte forma



com taxas de reações k_1 e k_2 .

Esse processo químico pode ser descrito pelo seguinte PVI [27]

$$\begin{cases} \frac{d[A]}{dt} = -k_1[A], & [A(0)] = [A_0] \\ \frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B], & [B(0)] = [B_0] \\ \frac{d[C]}{dt} = k_2[B], & [C(0)] = [C_0] \end{cases}, \quad (27)$$

em que $[X]$ representa a concentração do reagente X .

A partir de ferramentas de equações diferenciais, o PVI (27) pode ser resolvido analítica-

mente, sendo a solução dada por

$$\begin{aligned} [A(t)] &= [A_0]e^{-k_1t}, \\ [B(t)] &= [B_0]e^{-k_2t} + k_1[A_0]\frac{e^{-k_1t} - e^{-k_2t}}{k_2 - k_1} \\ [C(t)] &= [C_0] + [B_0](1 - e^{-k_2t}) + [A_0]\left(1 + \frac{k_1e^{-k_2t} - k_2e^{-k_1t}}{k_2 - k_1}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

- Solução de (27) via p-fuzzy

Alternativamente podemos estimar soluções de (27) por meio de um sistema p-fuzzy dado por

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \text{SBRF}_{f_1}(A) & A(0) = [A_0] \\ \frac{dB}{dt} = \text{SBRF}_{f_2}(A, B) & B(0) = [B_0] \\ \frac{dC}{dt} = \text{SBRF}_{f_3}(B) & C(0) = [C_0] \end{cases} \quad (29)$$

Adotamos que as variáveis de entrada (antecedente) assumem 4 classificações linguísticas e que as de saída (consequente) assumem 6 classificações (veja Tabela 5), cada uma delas descrita por um conjunto fuzzy, representadas nas Figuras 58 e 59, respectivamente.

	Antecedente	Consequente
1.	<i>“baixo”</i> (A_1 e B_1)	<i>“negativo alto”</i> (N_3)
2.	<i>“médio baixo”</i> (A_2 e B_2)	<i>“negativo médio”</i> (N_2)
3.	<i>“médio alto”</i> (A_3 e B_3)	<i>“negativo baixo”</i> (N_1)
4.	<i>“alto”</i> (A_4 e B_4)	<i>“positivo baixo”</i> (P_1)
5.		<i>“positivo médio”</i> (P_2)
6.		<i>“positivo alto”</i> (P_3)

Tabela 5: Antecedentes e consequentes da base de regras para o modelo (27).

A base de regras fuzzy elaborada para essa aplicação encontra-se na Figura 60, em que as setas representam as direções e magnitudes para as taxas de variação, isto é, as setas para direita/cima (esquerda/baixo) indicam a variação positiva (negativa) e o tamanho da seta indica a magnitude dessas variações.

A solução obtida pelo sistema p-fuzzy para o modelo químico (27) é ilustrada na Figura 61, tomando como condições iniciais $[A_0] = 1$, $[B_0] = 0$ e $[C_0] = 0$. Como pode ser visto, as soluções produzidas pelo sistema p-fuzzy são qualitativamente e quantitativamente similares a solução clássica do problema.

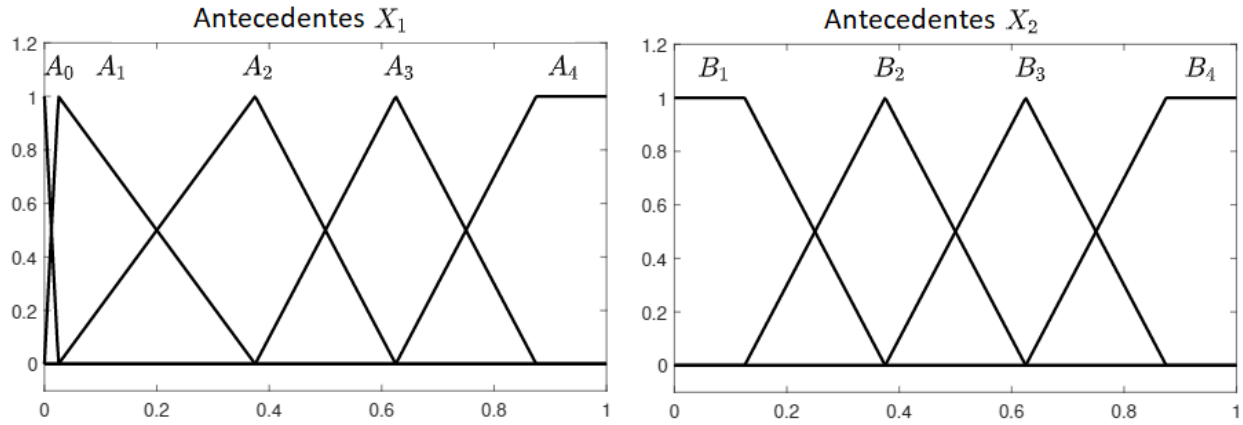


Figura 58: Antecedentes do sistema baseado em regras fuzzy para o modelo de reações químicas consecutivas.

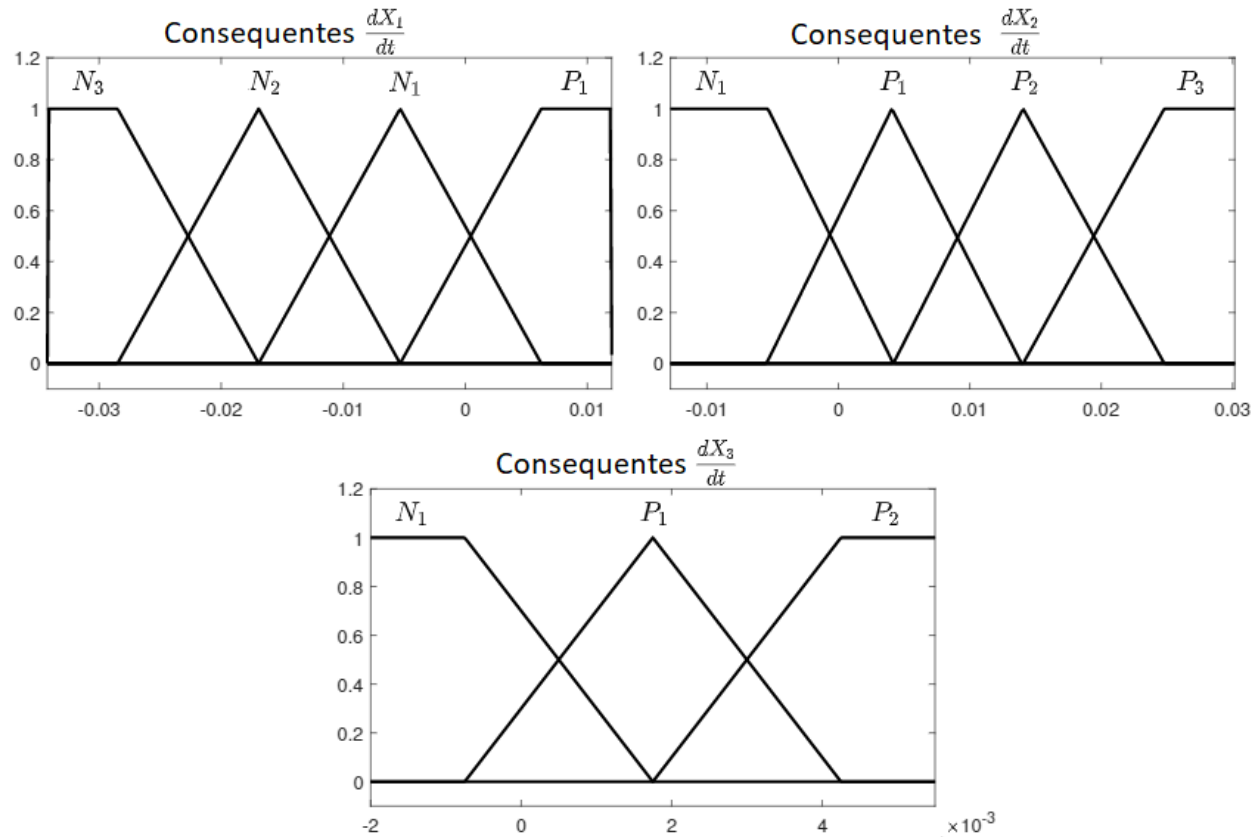


Figura 59: Consequentes do sistema baseado em regras fuzzy para o modelo de reações químicas consecutivas.

4.5 Modelo econômico de Goodwin

O ciclo de crescimento de Goodwin é considerado uma das grandes contribuições do economista norte-americano Richard Goodwin. Em termos gerais, o modelo proposto

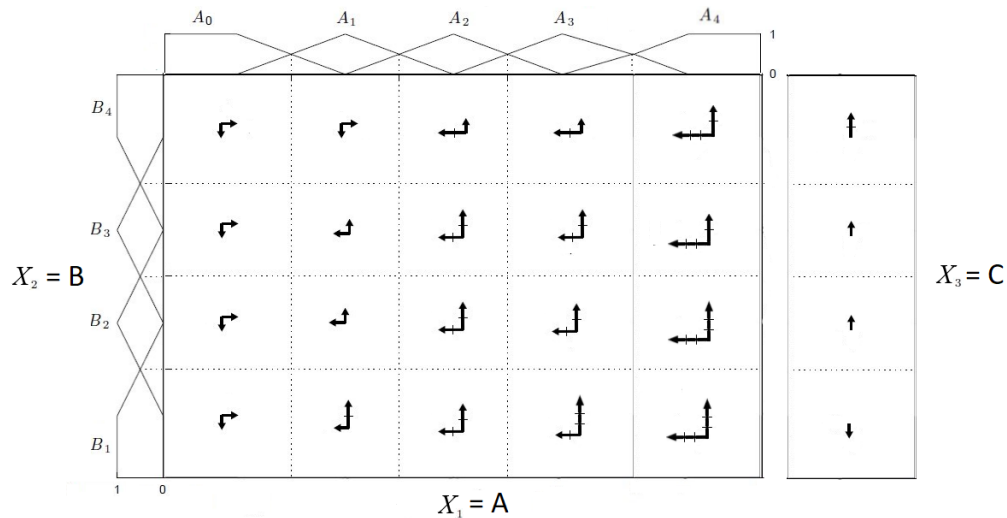


Figura 60: Representação gráfica das regras fuzzy baseada no campo de direções do modelo de reações químicas consecutivas. As setas representam as direções e magnitudes das taxas de variação.

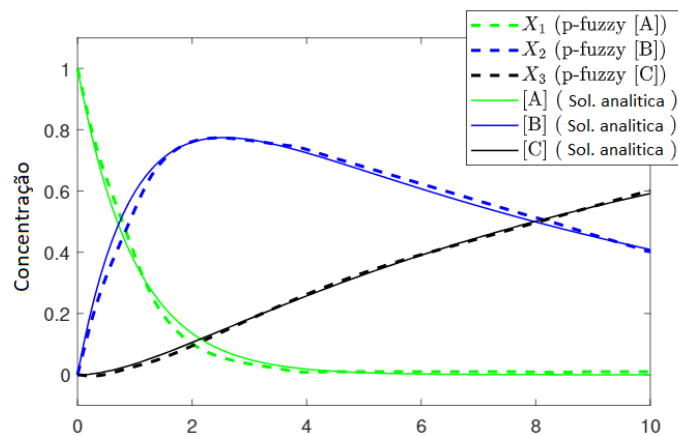


Figura 61: Soluções analítica e via p-fuzzy do PVI dado em (27) com $[A_0] = 1$, $[B_0] = 0$ e $[C_0] = 0$.

por ele consiste em um par de equações diferenciais ordinárias que descrevem a interação dinâmica entre os níveis de emprego (v) e a distribuição da renda em uma economia, expressa pela parcela salarial (u), em um contexto de crescimento econômico [19].

O modelo é concebido da seguinte maneira: se os salários aumentam, os lucros caem. A queda nos lucros implica em redução da poupança e do investimento detendo a criação de novos empregos. Entretanto a força de trabalho cresce, tanto pela incorporação de novos contingentes de trabalhadores como pela dispensa de trabalhadores decorrente, por exemplo, do progresso técnico. Desta forma, os salários se defasam em relação ao crescimento da produtividade e os lucros crescem. A acumulação acelera novamente. Assim o desemprego se reduz gradualmente conduzindo a um aumento de salários o que reinicia o processo e caracteriza a natureza cíclica do modelo [18].

O modelo de Goodwin estrutura-se a partir de sete premissas [18]:

- 1) Constante progresso técnico;
- 2) Crescimento constante da força de trabalho;
- 3) Somente são empregados dois fatores de produção (trabalho e capital) ambos homogêneos e não específicos;
- 4) Todas as quantidades são reais e líquidas;
- 5) Todos os salários são consumidos, e todos os lucros são poupados e reinvestidos;
- 6) A razão capital produto é constante;
- 7) A taxa de salário real é crescente na vizinhança do pleno emprego.

Tais premissas se resumem no seguinte sistema de equações [11]

$$\begin{cases} \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \left(\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta \right) - \frac{1}{\sigma} u \\ \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = -(\gamma + \alpha) + \rho v. \end{cases}, \quad (30)$$

onde v é o nível de emprego, u nível salarial, α é a taxa de crescimento exógeno na produtividade do trabalho, β a taxa de crescimento exógeno da população e σ a relação capital-produto. Enquanto que γ e ρ são parametros econômicos.

- Goodwin via p-fuzzy

O modelo de Goodwin dado por (30) é baseado nas 7 premissas enunciadas acima. Tais equações apresentam a seguinte propriedade (de forma análoga ao modelo presa-predador de Lotka-Volterra):

$$\text{“dado o valor de uma variável, a taxa específica da outra é constante”} \quad (31)$$

Por exemplo, para cada v fixado em (30), a taxa específica $\frac{1}{u} \frac{du}{dt}$ é constante.

Cada uma das variáveis de entrada V e U é classificada nos subconjuntos fuzzy *baixo* (A_1 e B_1), *médio baixo* (A_2 e B_2), *médio alto* (A_3 e B_3) e *alto* (A_4 e B_4). As variáveis de saída (variação específica de cada variável $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$ e $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt}$) assumem os termos *negativa* (N_2), *negativa baixa* (N_1), *positiva baixa* (P_1) e *positiva* (P_2), representadas na Figura 63.

A base de regras tem representação na Figura 62. A partir da base de regras e método de Mamdani, as trajetórias para u e v são dadas numericamente por

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + hv_n SBRF_v(v_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + hu_n SBRF_u(v_n, u_n) \end{cases}.$$

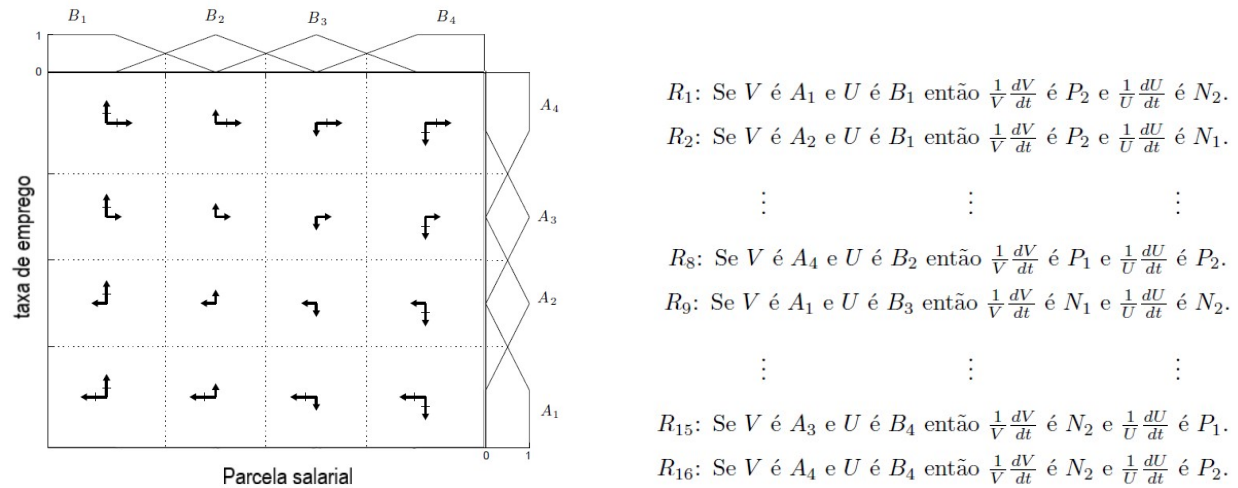


Figura 62: a) Representação gráfica da base de regras na forma de vetores de direções e b) algumas regras fuzzy usadas para o modelo de Goodwin.

Nas simulações computacionais foram estabelecidas duas variáveis linguísticas de entrada (V e U) e duas de saída $\left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \right.$ e $\left. \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} \right)$. Uma vez estabelecida a base de regras, nosso modelo utilizará o método de Mamdani (como módulo de inferência) e o centro de massa (como módulo de defuzzificação).

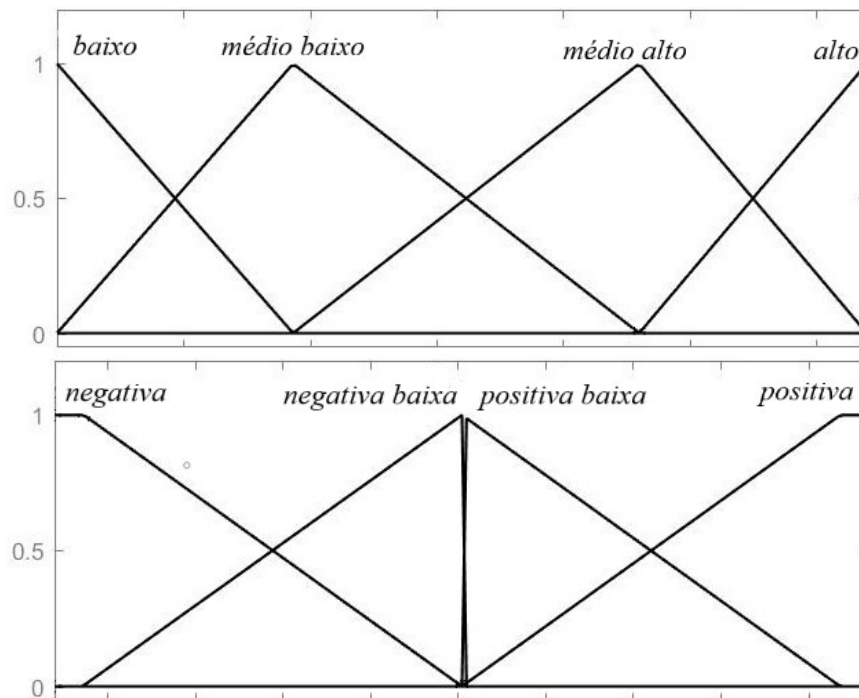
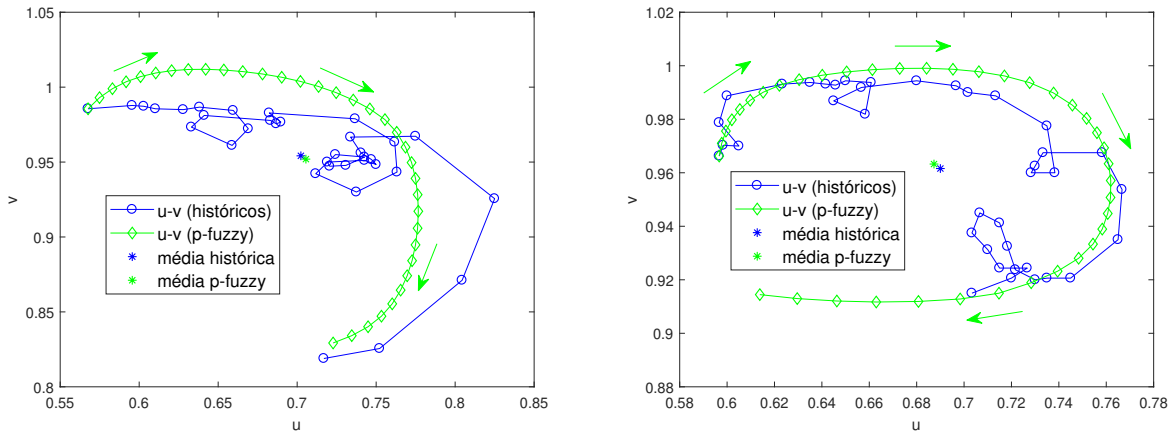


Figura 63: Conjuntos fuzzy nos antecedentes (subfigura acima) e nos consequentes (subfigura abaixo).

Consideremos o sistema p -fuzzy para simular o comportamento dinâmico das variáveis u e v para as economias da Finlândia e da Alemanha.

Os diagramas de fase da solução p -fuzzy (para u e v) e dos dados econômicos históricos da Finlândia (de 1960 até 1994) são apresentados na Figura 64(a) e, na Figura 64(b), para Alemanha (de 1956 até 1994) [25].



(a) Solução p -fuzzy para dados econômicos da Finlândia entre 1960 e 1994. (b) Solução p -fuzzy para dados econômicos da Alemanha entre 1956 e 1994.

Figura 64: Soluções p -fuzzy para o modelos de Goodwin.

Por fim, na Seção 4.6 trazemos uma breve discussão sobre equilíbrio e estabilidade de sistemas p -fuzzy. Mais recentemente, Jafelice e Bertone [20] tem estudado sistemas p -fuzzy para conjuntos fuzzy do tipo-2. Conjuntos fuzzy tipo-2 não serão tratados em nosso texto.

4.6 Equilíbrio e estabilidade de sistemas baseados em regras

O conceito de equilíbrio de um sistema baseado em regras é o mesmo de equações diferenciais, isto é, estados cuja variação é nula. Porém, neste caso, a investigação de tal equilíbrio é realizada a partir da base de regras.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de pontos de equilíbrio é que haja mudança de sinal nos consequentes de uma base de regras ordenada, cujas funções de pertinência são contínuas [3].

O estudo de estabilidade do equilíbrio seria realizado pelo método direto de Lyapunov, o qual se utiliza de uma função $V(x)$ positiva definida, numa vizinhança U do equilíbrio \bar{x} . Tal método diz que, num equilíbrio \bar{x} devemos ter $V(\bar{x}) = 0$, $V(x) > 0$ para x em $U \setminus \{\bar{x}\}$ [13]. Assim,

- Se $V'(x) < 0$ em $U \setminus \{\bar{x}\}$, então o equilíbrio é assintoticamente estável;
- Se $V'(x) > 0$ em $U \setminus \{\bar{x}\}$, então o equilíbrio é instável.

Note que para um sistema baseado em regras fuzzy não temos em mãos o campo de direções f . Dessa forma, o estudo de estabilidade por meio do sinal dos autovalores do sistema linearizado torna-se inviável. Esse foi o motivo que levou a explorar o método direto de Lyapunov introduzido em [5], já que a função $V(x)$, mesmo nas equações diferenciais clássicas, pode ser escolhida independentemente do conhecimento do campo f .

Para ilustrar essa metodologia vamos estudar o sistema SIS (susceptível-infectado-susceptível) com dinâmica vital e população total constante. Essa hipótese faz com que $S + I = N$ e, do ponto de vista de dinâmica, basta investigarmos a evolução de uma das classes, (susceptíveis, por exemplo) que a outra é obtida pelo complementar ($I = N - S$). Assim, adotaremos S como variável de estado e entrada do sistema fuzzy enquanto a variação específica $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é a saída do sistema.

O modelo epidemiológico SIS pressupõe que indivíduos não adquirem imunidade, isto é, cada infectado que se recupera passa a ser susceptível imediatamente [15]. Essa hipótese faz com que as regras sejam norteadas pelo seguinte raciocínio: quando o número de susceptíveis é pequeno, surgem poucos casos novos de infectados, o que contribui para que a classe de susceptíveis não diminua. Além disso, como a população total é constante e todos os indivíduos nascem susceptíveis, a população de susceptíveis aumenta. Por outro lado, à medida que o número de susceptíveis vai crescendo, novos casos da doença vão surgindo, de forma que a variação na classe de susceptíveis (embora ainda positiva) diminua. Quando o número de susceptíveis é suficientemente grande (neste caso denominado como “alto”), o número de novos casos de infecção também cresce e isso faz com que a variação na classe dos indivíduos susceptíveis passe a ser negativa.

Resumidamente escolhemos as regras fuzzy abaixo para nosso sistema:

R_1 : Se S for “baixo” (B) então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “alto positivo” (AP) R_2 : Se S for “médio baixo” (mB) então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “baixo positivo” (bP) R_3 : Se S for “médio alto” (mA) então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “baixo positivo” (bP) R_4 : Se S for “alto” (A) então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “baixo negativo” (bN)

Tabela 6: Regras para o estudo de equilíbrio e estabilidade do modelo SIS.

Com as funções de pertinência escolhidas (contínuas) para os conjuntos fuzzy da base de regras, de acordo com [10], o estado de equilíbrio \bar{S} existe e é obtido pela intersecção entre os conjuntos fuzzy médio alto e alto, antecedentes das terceira e quarta regras. Isso é consequência da troca de sinais nos consequentes dessas regras - baixo positivo e baixo negativo. Assim, $\bar{S} = 67,5$ (veja Figura 65). Mais ainda, como esses consequentes passam de positivo para negativo (veja Figura 66), a saída $F(s)$ do sistema fuzzy é tal que, para s numa vizinhança $U \setminus \{\bar{S}\}$, $F(s) > 0$ se $s < \bar{S}$ e $F(s) < 0$ se $s > \bar{S}$ (veja Figura 67).

Note que $V(s) = \left(\frac{1}{2}\right) (s - \bar{S})^2$ é uma função positiva definida e $V'(s) = \nabla V(s)F(s) = (s - \bar{S})F(s) < 0$ para todo s em $U \setminus \{\bar{S}\}$. Logo, $V(s)$ é uma função de Lyapunov e \bar{S}

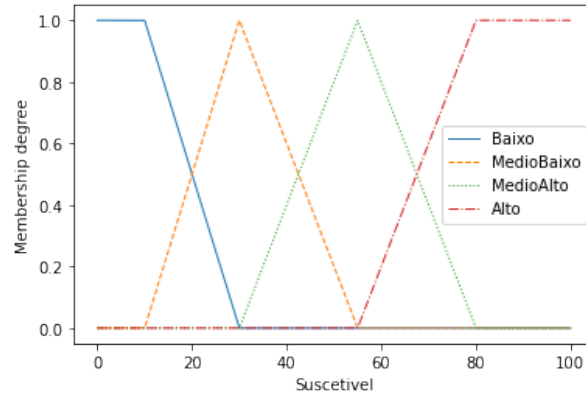


Figura 65: Funções de pertinência para S.

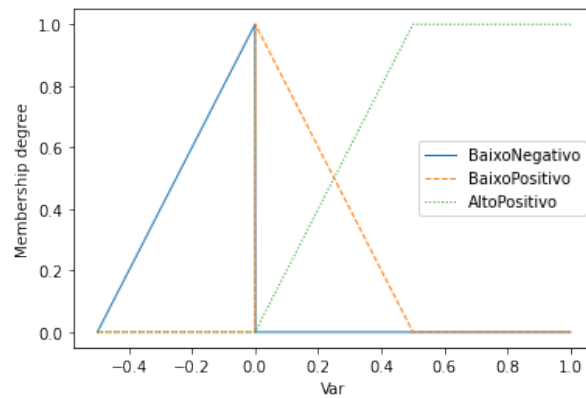


Figura 66: Funções de pertinência para $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$.

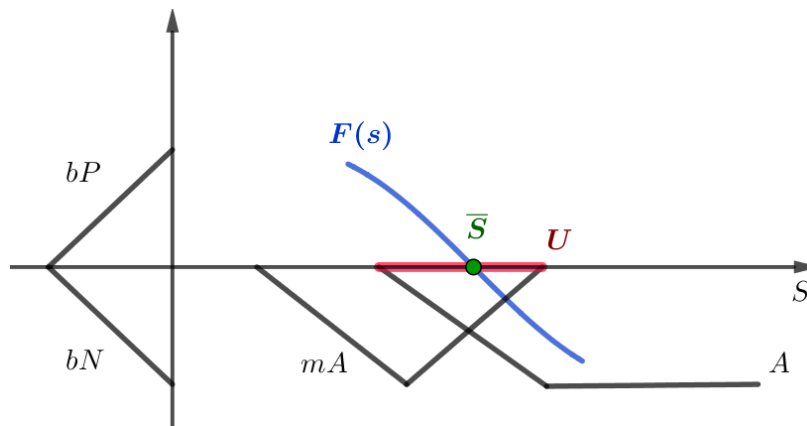


Figura 67: Vizinhança U em que a saída $F(s)$ do sistema fuzzy troca de sinal.

é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Conseqüentemente, a doença tende a se estabilizar no equilíbrio $(\bar{S}, N - \bar{S})$. Podemos visualizar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio na Figura 68, considerando como condições iniciais $S(0) = 80$ e $I(0) = 20$.

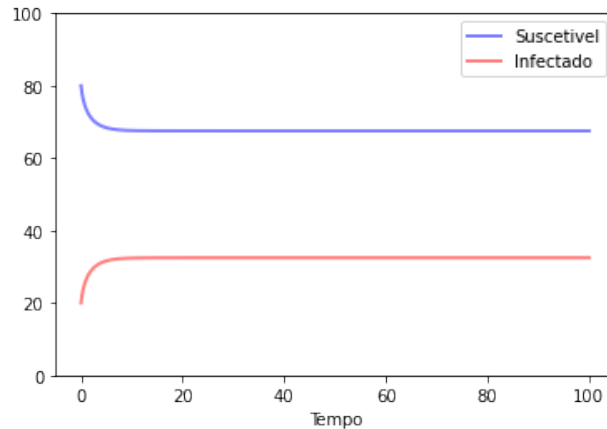


Figura 68: Evolução temporal dos suscetíveis e infectados com condições iniciais $S(0) = 80$ e $I(0) = 20$.

O método de inferência fuzzy adotado aqui foi de Mamdani, no entanto queremos ressaltar que o método de inferência de Takagi-Sugeno também poderia ser utilizado e, nesse caso, pode se ter explicitamente a saída do controlador, representando o campo de direções da equação diferencial, e aí a metodologia aqui proposta ficaria semelhante à que se encontra na literatura de equações diferenciais, com a observação que o equilíbrio seria obtido via base de regras. O estudo da estabilidade dos estados de equilíbrio poderia ser feito por meio da linearização da saída do sistema fuzzy, uma vez que o método de Takagi-Sugeno fornece explicitamente tal saída.

No caso do modelo SIS com população total constante e dinâmica vital, analisado acima, a metodologia utilizada pode facilitar a estimativa de importantes parâmetros epidemiológicos, que determinam sob quais condições a doença se propaga na população. A obtenção desses parâmetros nos modelos determinísticos clássicos envolve o conhecimento de taxas nem sempre fáceis de serem medidas (como a taxa de contato, por exemplo). A partir de taxas demográficas e valores conhecidos para uma doença específica (como taxa de recuperação), podemos estimar o valor de reprodutibilidade basal a partir das funções de pertinência, que nos modelos determinísticos envolve o conhecimento das taxas de natalidade, recuperação e contato. Essa mesma metodologia pode ser aplicada num sistema bidimensional, como os modelos SIR e SIRS.

5 Considerações Finais

Este minicurso traz uma abordagem para tratar problemas de valor inicial discreto ou baseado em um campo de direções através das principais características do fenômeno estudado. O campo é então dado por um sistema de base de regras fuzzy e um método de inferência fuzzy, que juntamente com um método numérico (o de Euler, por exemplo) fornecem a saída que descreve o comportamento da solução do problema em questão.

O material apresenta diversas aplicações a partir de sistemas p-fuzzy, nas áreas de biomatemática, como os modelos populacionais clássicos de Verhulst e presa-predador proposto por Lotka-Volterra. Também apresenta aplicações nas áreas de química e economia,

fornecendo aproximações razoáveis para as soluções clássicas dos modelos.

A abordagem via sistemas p-fuzzy é ideal para especialistas que não possuem um conhecimento específico em equações diferenciais, mas que têm conhecimento do fenômeno em questão e portanto sabe traduzir o comportamento qualitativo do campo de direções do problema a partir de uma base de regras.

A Implementação em Python via Simpful

Atualmente existem diversos softwares para lidar com lógica fuzzy [1]. O Fuzzy Logic Toolbox [17] do Matlab é o mais popular, porém tem a desvantagem de ser distribuído apenas comercialmente. Dessa forma, diversas alternativas de códigos abertos foram surgindo com o tempo. O Simpful [30] é uma biblioteca Python de código livre. O Simpful é de fácil manipulação, além de ser um dos mais completos. A seguir, apresentamos alguns de seus usos.

A.1 Método de Mamdani

```
[19]: from simpful import *

# Um sistema de inferência fuzzy de Mamdani para a vitalidade_
↳da violeta
# Crie um objeto de sistema fuzzy
FS = FuzzySystem()

# Defina os conjuntos fuzzy de entrada e as variáveis_
↳linguísticas
A_1 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 0, b = 0, c = 25),
↳term = "pequena" )
A_2 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 20, b = 30, c =
↳45), term = "media" )
A_3 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 35, b = 65, c =
↳65), term = "grande" )
A = LinguisticVariable( [A_1, A_2, A_3], concept = "Agua",
↳universe_of_discourse = [0, 65] )
FS.add_linguistic_variable( "Agua", LinguisticVariable( [A_1,
↳A_2, A_3],
concept =
↳"Quantidade de agua", universe_of_discourse = [0, 65] ) )

S_1 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 0, b = 0, c = 35),
↳term = "pequeno" )
S_2 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 25, b = 50, c =
↳65), term = "medio" )
S_3 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 60, b = 95, c =
↳95), term = "grande" )
```

```
S = LinguisticVariable( [S_1, S_2, S_3], concept = "Sol",  
↳universe_of_discourse = [0, 95] )  
FS.add_linguistic_variable( "Sol", LinguisticVariable( [S_1,  
↳S_2, S_3],  
concept =  
↳"Tempo de exposição no Sol", universe_of_discourse = [0, 95]  
↳) )  
  
# Defina o conjunto fuzzy de saída e as variáveis linguísticas  
V_1 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 0, b = 0, c = 0.  
↳2), term = "ruim" )  
V_2 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 0.1, b = 0.5, c =  
↳0.9), term = "media" )  
V_3 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 0.8, b = 1, c =  
↳1), term = "boa" )  
V = LinguisticVariable( [V_1, V_2, V_3], concept =  
↳"Vitalidade", universe_of_discourse = [0, 1] )  
FS.add_linguistic_variable( "Vitalidade", LinguisticVariable(  
↳[V_1, V_2, V_3],  
concept = "Vitalidade da violeta",  
↳universe_of_discourse = [0, 1] ) )  
  
# Define as regras fuzzy  
R1 = "IF (Agua IS pequena) AND (Sol IS pequeno) THEN_  
↳(Vitalidade IS media) "  
R2 = "IF (Agua IS pequena) AND (Sol IS medio) THEN (Vitalidade_  
↳IS media) "  
R3 = "IF (Agua IS pequena) AND (Sol IS grande) THEN (Vitalidade_  
↳IS ruim) "  
R4 = "IF (Agua IS media) AND (Sol IS pequeno) THEN (Vitalidade_  
↳IS boa) "  
R5 = "IF (Agua IS media) AND (Sol IS medio) THEN (Vitalidade IS_  
↳boa) "  
R6 = "IF (Agua IS media) AND (Sol IS grande) THEN (Vitalidade_  
↳IS media) "  
R7 = "IF (Agua IS grande) AND (Sol IS pequeno) THEN (Vitalidade_  
↳IS ruim) "  
R8 = "IF (Agua IS grande) AND (Sol IS medio) THEN (Vitalidade_  
↳IS ruim) "  
R9 = "IF (Agua IS grande) AND (Sol IS grande) THEN (Vitalidade_  
↳IS ruim) "
```



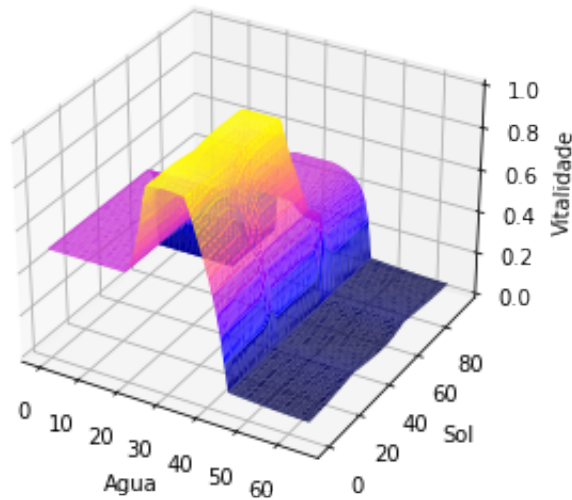
```
[21]: import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace, array
# Plotando a superfície
xs = []
ys = []
zs = []
DIVs = 70
for x in linspace(0, 65, DIVs):
    for y in linspace(0, 95, DIVs):
        FS.set_variable("Agua", x)
        FS.set_variable("Sol", y)
        vitalidade = FS.inference()['Vitalidade']
        xs.append(x)
        ys.append(y)
        zs.append(vitalidade)
xs = array(xs)
ys = array(ys)
zs = array(zs)

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

xx, yy = plt.meshgrid(xs,ys)

ax.plot_trisurf(xs,ys,zs, vmin = 0, vmax = 1, cmap='gnuplot2')
ax.set_xlabel("Agua")
ax.set_ylabel("Sol")
ax.set_zlabel("Vitalidade")
ax.set_title("Vitalidade da violeta", pad = 10)
ax.set_zlim(0, 1)
plt.tight_layout()
plt.show()
```


Vitalidade da violeta



A.2 Método de Larsen

```
[7]: from simpful import *

# Um sistema de inferência fuzzy de Larsen para a vitalidade da
↳violeta
# Crie um objeto de sistema fuzzy
FS = FuzzySystem(operators = 'AND_PRODUCT')

# Defina os conjuntos fuzzy de entrada e as variáveis
↳linguísticas
A_1 = FuzzySet( points = [ [0, 1], [25, 0] ], term = "pequena" )
A_2 = FuzzySet( points = [ [20, 0], [30, 1], [45, 0] ], term =
↳"media" )
A_3 = FuzzySet( points = [ [35, 0], [65, 1] ], term = "grande" )
A = LinguisticVariable( [A_1, A_2, A_3], concept = "Agua",
↳universe_of_discourse = [0, 65] )
FS.add_linguistic_variable( "Agua", LinguisticVariable( [A_1,
↳A_2, A_3],
concept =
↳"Quantidade de agua", universe_of_discourse = [0, 65] ) )

S_1 = FuzzySet( points = [ [0, 1], [35, 0] ], term = "pequeno" )
S_2 = FuzzySet( points = [ [25, 0], [50, 1], [65, 0] ], term =
↳"medio" )
```

```
S_3 = FuzzySet( points = [ [60, 0], [95, 1] ], term = "grande" )
S = LinguisticVariable( [S_1, S_2, S_3], concept = "Sol",
↳universe_of_discourse = [0, 95] )
FS.add_linguistic_variable( "Sol", LinguisticVariable( [S_1,
↳S_2, S_3],
concept =
↳"Tempo de exposição no Sol", universe_of_discourse = [0, 95]
↳) )

# Defina o conjunto fuzzy de saída e as variáveis linguísticas
V_1 = FuzzySet( points = [ [0, 1], [0.2, 0] ], term = "ruim" )
V_2 = FuzzySet( points = [ [0.1, 0], [0.5, 1], [0.9, 0] ], term
↳= "media" )
V_3 = FuzzySet( points = [ [0.8, 0], [1, 1] ], term = "boa" )
V = LinguisticVariable( [V_1, V_2, V_3], concept =
↳"Vitalidade", universe_of_discourse = [0, 1] )
FS.add_linguistic_variable( "Vitalidade", LinguisticVariable(
↳[V_1, V_2, V_3],
↳concept = "Vitalidade da violeta",
↳universe_of_discourse = [0, 1] ) )

# Define as regras fuzzy
R1 = "IF (Agua IS pequena) AND (Sol IS pequeno) THEN
↳(Vitalidade IS media) "
R2 = "IF (Agua IS pequena) AND (Sol IS medio) THEN (Vitalidade
↳IS media) "
R3 = "IF (Agua IS pequena) AND (Sol IS grande) THEN (Vitalidade
↳IS ruim) "
R4 = "IF (Agua IS media) AND (Sol IS pequeno) THEN (Vitalidade
↳IS boa) "
R5 = "IF (Agua IS media) AND (Sol IS medio) THEN (Vitalidade IS
↳boa) "
R6 = "IF (Agua IS media) AND (Sol IS grande) THEN (Vitalidade
↳IS media) "
R7 = "IF (Agua IS grande) AND (Sol IS pequeno) THEN (Vitalidade
↳IS ruim) "
R8 = "IF (Agua IS grande) AND (Sol IS medio) THEN (Vitalidade
↳IS ruim) "
R9 = "IF (Agua IS grande) AND (Sol IS grande) THEN (Vitalidade
↳IS ruim) "
FS.add_rules( [R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8, R9] )
```

```
# Defina os valores dos antecedentes
FS.set_variable("Agua", 40)
FS.set_variable("Sol", 60)

# Executar inferência de Larsen e imprimir saída
print(FS.inference())
```

```

_____
/ ___ ) ( ) ( \ / ) ( _ \ ( ___ ) / ) ( \ ( ) v2.4.5
\___ \ ) ( / \ / \ ) ___ / ) _ ) \ / ( / ( _ / \
( ___ / ( ___ ) \ ) ( / ( ___ ) ( ) \ ___ / \ ___ /

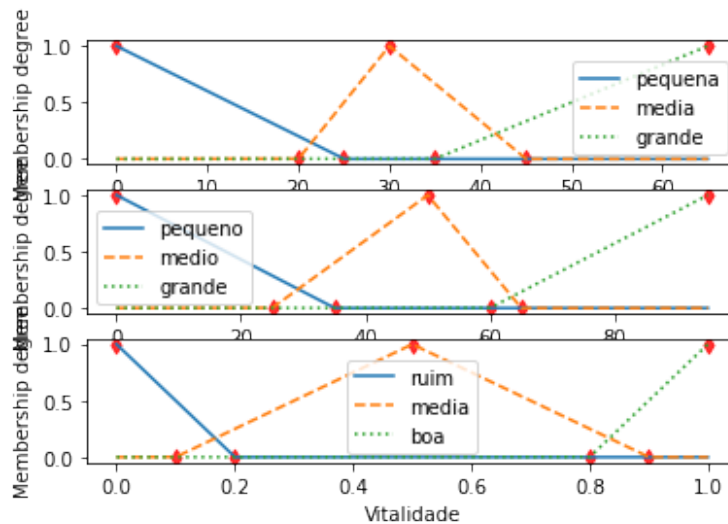
```

Created by Marco S. Nobile (m.s.nobile@tue.nl)
 and Simone Spolaor (simone.spolaor@unimib.it)

{'Vitalidade': 0.6309107642671535}

```
[8]: # Plotando os conjuntos fuzzy dos antecedentes e consequentes
import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(3,1)
A.draw(ax = ax[0])
S.draw(ax = ax[1])
V.draw(ax = ax[2])
```

[8]: <AxesSubplot:xlabel='Vitalidade', ylabel='Membership degree'>



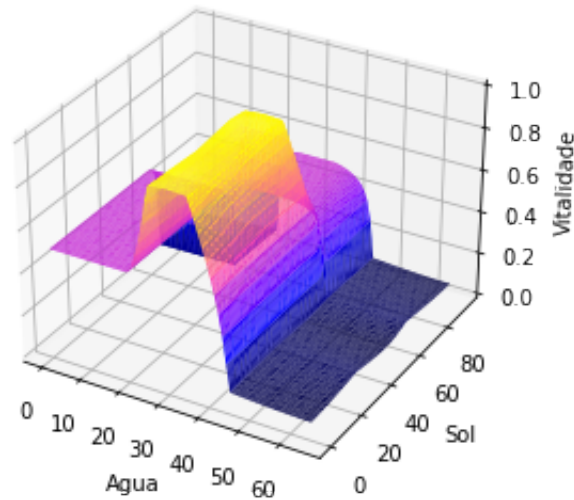
```
[9]: import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace, array
# Plotando a superfície
xs = []
ys = []
zs = []
DIVs = 70
for x in linspace(0, 65, DIVs):
    for y in linspace(0, 95, DIVs):
        FS.set_variable("Agua", x)
        FS.set_variable("Sol", y)
        vitalidade = FS.inference()['Vitalidade']
        xs.append(x)
        ys.append(y)
        zs.append(vitalidade)
xs = array(xs)
ys = array(ys)
zs = array(zs)

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

xx, yy = plt.meshgrid(xs,ys)

ax.plot_trisurf(xs,ys,zs, vmin = 0, vmax = 1, cmap='gnuplot2')
ax.set_xlabel("Agua")
ax.set_ylabel("Sol")
ax.set_zlabel("Vitalidade")
ax.set_title("Vitalidade da violeta", pad = 10)
ax.set_zlim(0, 1)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Vitalidade da violeta



A.3 Método de Takagi-Sugeno

```
[15]: from simpful import *

# Um sistema de inferência fuzzy de Takagi-Sugeno para o_
↳ exemplo 7
# Crie um objeto de sistema fuzzy
FS = FuzzySystem()

# Defina os conjuntos fuzzy de entrada e as variáveis_
↳ linguísticas
A_1 = FuzzySet( points = [ [0., 1.], [2., 1.], [4., 0.]], term_
↳ "A1" )
A_2 = FuzzySet( points=[ [2., 0.], [4., 1.], [6., 1.] ], term =
↳ "A2" )
A = LinguisticVariable( [A_1, A_2], concept = "A",
↳ universe_of_discourse = [0, 6] )
FS.add_linguistic_variable( "A", LinguisticVariable( [A_1,
↳ A_2], concept = "A" ) )
A.plot()

# Defina as funções de saída de primeira ordem
FS.set_output_function("y1", "A + 2")
FS.set_output_function("y2", "2 * A")
```

```
## Defina as saídas crisp de ordem zero
#FS.set_crisp_output_value("nome", constante)

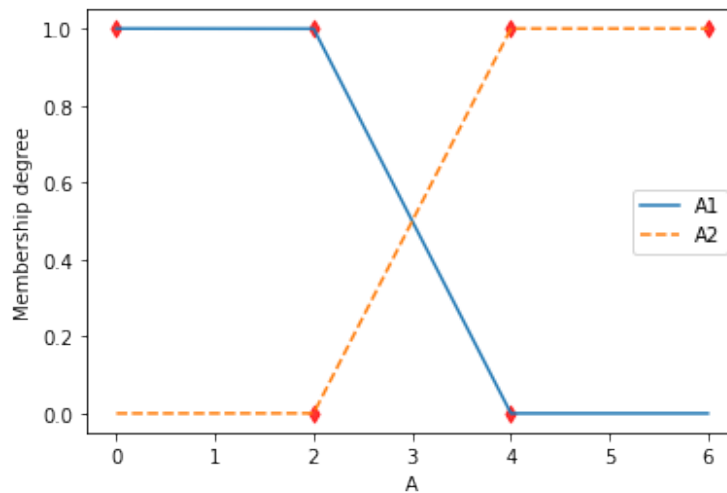
# Define as regras fuzzy
R1 = "IF (A IS A1) THEN (Y IS y1)"
R2 = "IF (A IS A2) THEN (Y IS y2)"
FS.add_rules( [R1, R2] )

# Defina os valores do antecedente
FS.set_variable("A", 0)

# Executar inferência de Takagi-Sugeno e imprimir saída
print(FS.Sugeno_inference(["Y"]))
```

```
_____/_____) ( ) ( \ / ) ( _ \ ( ____ ) / ) ( \ ( ) v2.4.5
\____ \ ) ( / \ / \ ) ____/ ) _ ) \ / ( / ( _ / \
(____/ ( ) \ ) ( _ / ( ____ ) ( ) \ ____ / \ ____ /
```

Created by Marco S. Nobile (m.s.nobile@tue.nl)
 and Simone Spolaor (simone.spolaor@unimib.it)

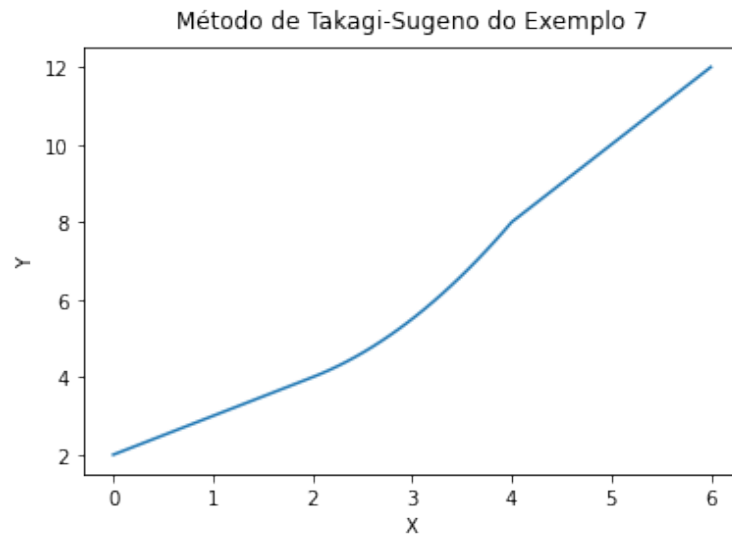


```
* Detected Sugeno model type
{'Y': 2.0}
```

```
[16]: import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace, array
```

```
# Plotando a curva
xs = []
ys = []
DIVs = 70
for x in linspace(0, 6, DIVs):
    FS.set_variable("A", x)
    y = FS.Sugeno_inference()['Y']
    xs.append(x)
    ys.append(y)
xs = array(xs)
ys = array(ys)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(xs,ys)
ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_title("Método de Takagi-Sugeno do Exemplo 7", pad = 10)
plt.show()
```



A.4 p-fuzzy

```
[6]: from simpful import *

# Um sistema parcialmente fuzzy para o crescimento logístico
# Um sistema de inferência fuzzy de Mamdani
```

```
# Crie um objeto de sistema fuzzy
FS = FuzzySystem()

# Defina os conjuntos fuzzy de entrada e as variáveis
↳linguísticas
P_1 = FuzzySet( function = Trapezoidal_MF(a = 0.0, b = 0.0, c =
↳20, d = 50), term = "Baixissima" )
P_2 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 20, b = 50, c =
↳80), term = "Baixa" )
P_3 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 60, b = 90, c =
↳120), term = "Media" )
P_4 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 100, b = 140, c =
↳180), term = "MediaAlta" )
P_5 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 150, b = 180, c =
↳210), term = "Alta" )
P_6 = FuzzySet( function = Trapezoidal_MF(a = 180, b = 210, c =
↳220, d = 220), term = "Altissima" )
P = LinguisticVariable( [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6], concept
↳= "Populacao", universe_of_discourse = [0, 220] )
FS.add_linguistic_variable( "Populacao", LinguisticVariable(
↳[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6],
concept =
↳"Populacao", universe_of_discourse = [0, 220] ) )

# Defina o conjunto fuzzy de saída e as variáveis linguísticas
V_1 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = -0.2, b = 0.0, c =
↳0.001), term = "BaixaNegativa" )
V_2 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 0.0, b = 0.001, c
↳= 0.3), term = "BaixaPositiva" )
V_3 = FuzzySet( function = Triangular_MF(a = 0.2, b = 0.5, c =
↳0.8), term = "MediaPositiva" )
V_4 = FuzzySet( function = Trapezoidal_MF(a = 0.6, b = 0.9, c =
↳1.0, d = 1.0), term = "AltaPositiva" )
V = LinguisticVariable( [V_1, V_2, V_3, V_4], concept = "Var",
↳universe_of_discourse = [-0.2, 1] )
FS.add_linguistic_variable( "Var", LinguisticVariable( [V_1,
↳V_2, V_3, V_4],
↳concept = "Variacao Especifica",
↳universe_of_discourse = [-0.2, 1] ) )

# Define as regras fuzzy
```



```
R1 = "IF (Populacao IS Baixissima) THEN (Var IS AltaPositiva) "  
R2 = "IF (Populacao IS Baixa) THEN (Var IS AltaPositiva) "  
R3 = "IF (Populacao IS Media) THEN (Var IS MediaPositiva) "  
R4 = "IF (Populacao IS MediaAlta) THEN (Var IS MediaPositiva) "  
R5 = "IF (Populacao IS Alta) THEN (Var IS BaixaPositiva) "  
R6 = "IF (Populacao IS Altissima) THEN (Var IS BaixaNegativa) "  
FS.add_rules( [R1, R2, R3, R4, R5, R6] )
```

```
# Defina o valor do antecedente  
FS.set_variable("Populacao", 115)
```

```
# Executar inferência de Mamdani e imprimir saída  
result = FS.Mamdani_inference(["Var"])  
print(result)
```

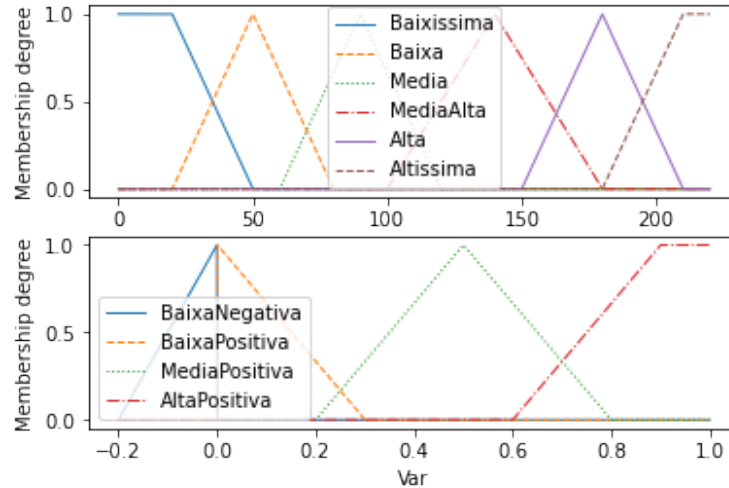
```
____ _ _ _ _ ____ _ _ _ _  
/ ____ ) ( ) ( \ / ) ( _ \ ( ____ ) / ) ( \ ( ) v2.4.5  
\ ____ \ ) ( / \ / \ ) ____ / ) _ ) \ / ( / ( _ / \  
( ____ / ( ____ ) \ ) ( _ / ( ____ ) ( ____ ) \ ____ / \ ____ /
```

Created by Marco S. Nobile (m.s.nobile@tue.nl)
and Simone Spolaor (simone.spolaor@unimib.it)

```
{'Var': 0.5000012186694551}
```

```
[5]: # Plotando os conjuntos fuzzy dos antecedentes e consequentes  
import matplotlib.pyplot as plt  
fig, ax = plt.subplots(2,1)  
P.draw(ax = ax[0])  
V.draw(ax = ax[1])
```

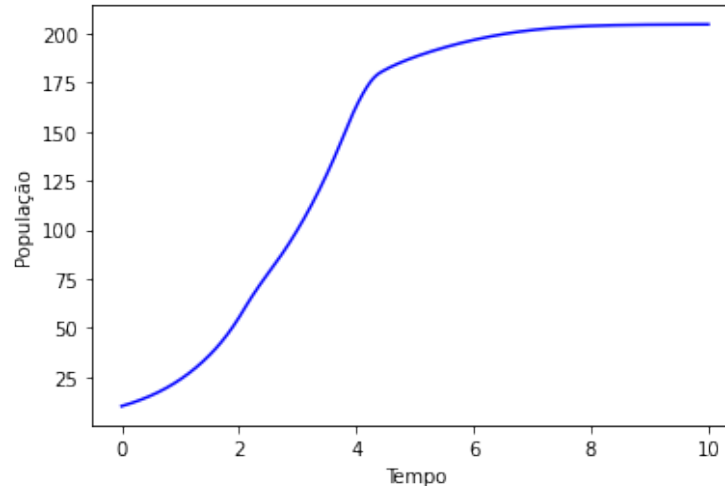
```
[5]: <AxesSubplot:xlabel='Var', ylabel='Membership degree'>
```



```
[8]: # Definindo o método de Euler
def it_euler(t, x, h, n_steps):
    X = [x]
    T = [t]
    for k in range(n_steps + 1):
        FS.set_variable("Populacao", x)
        var = FS.inference()['Var']
        x += x * h * var
        t += h
        X.append(x)
        T.append(t)

# Informações do plot
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, facecolor='w', axisbelow=True)
ax.plot(T, X, 'b', label = 'População') #ax.plot(T, X, 'b',
↪label = 'Populacao')
ax.set_xlabel('Tempo')
ax.set_ylabel('População')
plt.show()
```

```
[9]: # Método de Euler
it_euler(0, 10, 0.001, 10000)
```



Referências

- [1] ALCALÁ-FDEZ, J., AND ALONSO, J. M. A survey of fuzzy systems software: Taxonomy, current research trends, and prospects. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 24, 1 (2016), 40–56.
- [2] AMENDOLA, M., SOUZA, A. L., AND BARROS, L. C. *Manual do uso da teoria dos conjuntos Fuzzy no MATLAB 6.5*. FEAGRI & IMECC–UNICAMP, 2005.
- [3] BARROS, L. C., AND BASSANEZI, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2021.
- [4] BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C., AND LODWICK, W. A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*, 1 ed. 347. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2017.
- [5] BARROS, L. C., LEITE, M. B. F., OLIVEIRA, R. Z. G., AND BASSANEZI, R. C. Estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy e a função de lyapunov. *Biomatemática IMECC–UNICAMP* 19 (2009), 1–10.
- [6] BASSANEZI, R. C., AND JUNIOR, W. C. F. *Equações Diferenciais: com aplicações*. Harbra, 1988.
- [7] BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, 1 ed. 295. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2013.
- [8] CASTANHO, M. *Construção e Avaliação de um Modelo Matemático para prever a evolução do Câncer de Próstata e descrever seu crescimento utilizando a Teoria de Conjuntos Fuzzy*. 2005. 127 f. PhD thesis, Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica)-FEEC/UNICAMP, Campinas, 2005.

- [9] CASTANHO, M. J. P., AND PEIXOTO, M. S. *Teoria dos conjuntos fuzzy no MatLab*. Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, 2010.
- [10] CECCONELLO, M., SILVA, J., AND BASSANEZI, R. C. *Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos*. Notas em Matemática Aplicada, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2010.
- [11] DESAI, M., HENRY, B., MOSLEY, A., AND PEMBERTON, M. A clarification of the goodwin model of the growth cycle. *Journal of Economic Dynamics and Control* 30, 12 (2006), 2661–2670.
- [12] DIAS, M. R. B., AND BARROS, L. C. O uso de controladores fuzzy para resolução de equações diferenciais ordinárias. *Revista Biomatemática* 15 (2005), 147–156.
- [13] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. SIAM, 2005.
- [14] JAFELICE, R. S. M., BARROS, L. C., AND BASSANEZI, R. C. *Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*. Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, 2012.
- [15] KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Random House New York, New York, 1988.
- [16] KLIR, G. J., AND YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [17] MATHWORKS. Fuzzy logic toolbox - r2020a, 2020. <https://www.mathworks.com/products/fuzzy-logic.html>.
- [18] MIEBACH, A. D. O ciclo de crescimento de goodwin: um modelo de dinâmica econômica não linear. Master’s thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2011.
- [19] MIEBACH, A. D., ET AL. O ciclo de crescimento de goodwin e a parcela salarial na economia brasileira.
- [20] MOTTA JAFELICE, R. S., AND BERTONE, A. M. A. *Biological Models Via Interval Type-2 Fuzzy Sets*. Springer, 2021.
- [21] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. John Wiley & Sons, Nova Jersey, 2007.
- [22] PEIXOTO, M. S. *Sistemas dinamicos e controladores fuzzy: um estudo da dispersão da morte subita dos citros em São Paulo*. PhD thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2005.
- [23] PEIXOTO, M. S., BARROS, L. C., AND BASSANEZI, R. C. Um modelo fuzzy presa-predador em citros: pulgões e joaninhas. *Biomatemática IMECC - UNICAMP* 14 (2004), 29–38.

- [24] RUGGIERO, M. A. G., AND LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Pearson, 2000.
- [25] SANCHEZ, D., BARROS, L. C., ESMI, E., AND MIEBACH, A. D. *Goodwin model via p-fuzzy system*. pp. 977–984.
- [26] SÁNCHEZ, D. E., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Discrete and continuous logistic p-fuzzy models. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications* (Cham, 2019), R. B. Kearfott, I. Batyrshin, M. Reformat, M. Ceberio, and V. Kreinovich, Eds., Springer International Publishing, pp. 556–566.
- [27] SÁNCHEZ, D. E., WASQUES, V. F., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Consecutive chemical reactions models via p-fuzzy systems. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* (2019), pp. 1 – 7.
- [28] SCIKIT-FUZZY, 2019. <https://pythonhosted.org/scikit-fuzzy/>.
- [29] SILVEIRA, G. P., GARCIA, R. O., GARCIA, A. O., VENDITE, L. L., BARROS, L. C., FERREIRA, U., AND BILLIS, A. Nomograma fuzzy câncer de próstata. <https://nfcfcp.ime.unicamp.br/home>.
- [30] SPOLAOR, S., FUCHS, C., CAZZANIGA, P., KAYMAK, U., BESOZZI, D., AND NOBILE, M. S. Simpful: a user-friendly python library for fuzzy logic. *International Journal of Computational Intelligence Systems* 13, 1 (2020), 1687–1698.
- [31] ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 3 (1965), 338 – 353.