

CÁLCULO PARA PROCESSOS FUZZY INTERATIVOS

Laécio Carvalho de Barros, Estevão Esmi

Universidade Estadual de Campinas
{laeciob,eelaureano}@ime.unicamp.br

Francielle Santo Pedro Simões

Universidade Federal de São Paulo
fsimoes@unifesp.br

Vinícius Francisco Wasques

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais
vinicius.wasques@cnpem.br

Resumo

Um processo evolutivo em que o valor futuro apresenta alguma correlação com o valor presente, em cada instante, é chamado de autocorrelacionado. Este é, portanto, um procedimento apropriado para se estudar processos ditos com “memória”. Na literatura estatística (estocástica), existe uma vasta bibliografia sobre o tema. Neste caso, a correlação é estudada por meio de métodos estatísticos, uma vez que em cada instante, o processo é dado por uma variável aleatória. No caso de um processo fuzzy, a ideia é análoga: em cada instante o processo é descrito por um número fuzzy, o qual pode apresentar interatividade (correlação) quando o tempo varia. Dessa forma, é preciso formalizar a noção de interatividade entre números fuzzy. Dessa forma, o curso vai, desde conceitos elementares de interatividade entre números fuzzy até os recentes resultados do cálculo diferencial e integral interativo fuzzy. Também, são estudadas as equações diferenciais fuzzy e problemas de valor inicial fuzzy, bem como métodos numéricos interativos fuzzy. Por fim, são apresentadas algumas aplicações em biomatemática para

ilustrar o tema aqui abordado.

Palavras-chave: Interatividade entre números fuzzy, Cálculo interativo fuzzy, Equações diferenciais fuzzy, método numérico.

Público-alvo. Nível graduação e pós-graduação.

Pré-requisitos. Cálculo diferencial e integral e conceitos de números fuzzy.

1 Introdução

A primeira publicação sobre teoria de conjuntos fuzzy é devida a Lofti Asker Zadeh em 1965 [61]. O objetivo dessa teoria é incluir algum tipo específico de incerteza ao campo da matemática. Essa abordagem é típica da teoria de conjuntos uma vez que lida com pertinência de elementos a um conjunto com certo grau de associação, que varia de 0 a 1. Essa estratégia, além de estender a noção de pertinência de um elemento a um conjunto, permite agregar e manipular matematicamente e computacionalmente a incerteza inerente a fenômenos de interesse.

A abordagem via teoria de conjuntos fuzzy tem sido aplicada com êxito em diversas áreas da ciência, como por exemplo em geologia [54], diagnósticos médicos [5, 42], otimização [29, 39, 38], biomatemática [55, 45, 36, 35], física [44, 43], química [60, 52, 53], engenharia [19, 37] entre outros. Um vasto campo de estudo, envolvendo modelagem considerando incertezas, é o de cálculo diferencial e integral para processos fuzzy. Esse minicurso segue essa linha de estudos, especificamente, aqui é proposto um material didático para estudo inicial de cálculo para processos fuzzy interativos.

Interatividade é uma relação entre números fuzzy, introduzida por Zadeh [62], que se assemelha à noção de dependência para o caso de variáveis aleatórias, na teoria de probabilidade. A interatividade fuzzy está atrelada ao conceito de distribuições de possibilidade (ou de pertinência) conjuntas [21, 12, 7], que é explorada nesse minicurso, tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado como apresentado aqui. O estudo de cálculo diferencial interativo tem sido desenvolvido recentemente pelo nosso grupo de pesquisa. Dentro do cálculo fuzzy a noção de interatividade está presente nas derivadas e integrais fuzzy.

Na literatura diversas derivadas fuzzy foram propostas, sem usar explicitamente a noção de interatividade, como por exemplo a derivada de Hukuhara [40, 25, 48], Hukuara-generalizada [49, 9] e generalizada [8, 10]. Tais derivadas são obtidas através de um limite de diferenças entre números fuzzy. Recentemente foi constatado que tais derivadas são casos particulares de derivadas fuzzy

interativas, isto é, a diferença associada a tais derivadas incorporam a noção de interatividade [59].

A primeira derivada fuzzy que considera interatividade do tipo linear foi apresentada em [7, 34]. As derivadas de Hukuhara e suas generalizações não são as únicas derivadas que consideram esse tipo de relação. A derivada de Fréchet, proposta por Esmi *et al.* [17] também é um exemplo de derivada interativa, assim como as derivadas propostas em [7, 59]. É possível modelar fenômenos, utilizando a relação de interatividade em equações diferenciais fuzzy, baseando-se em hipóteses bem estabelecidas na literatura. Por exemplo, em um modelo epidemiológico do tipo suscetível-infectado, considera-se que a população, em cada instante de tempo, seja constante, ou seja, $S(t) + I(t) = k, \forall t \in \mathbb{R}$, com $k > 0$. Supondo que as populações iniciais de suscetíveis e infectados sejam dados por números fuzzy, a condição dada anteriormente só é satisfeita no caso em que se utiliza interatividade [7, 58].

Esse minicurso utiliza essa abordagem para tratar de derivadas e integrais de processos fuzzy com memória, isto é, processos cujos valores futuros possuem uma relação funcional com os valores atuais ou passados. Esses processos, também chamados de processos fuzzy interativos autocorrelacionados, são semelhantes aos processos existentes em séries temporais, como por exemplo processos de Markov, que possuem aplicações em diversas áreas.

Outros exemplos surgem nas áreas de química e física. Isto é, considerando um sistema dinâmico que está sob a hipótese da lei de conservação de massas, e que a posição inicial da partícula (no caso físico) ou a concentração de um reagente (no caso químico) são dados por números fuzzy, a lei só é respeitada se a relação de interatividade for utilizada [57, 53].

Além do estudo analítico, é possível tratar de EDFs do ponto de vista numérico. Nesse sentido, vários métodos foram propostos [2, 1, 24, 33, 31, 23]. No entanto, nenhum deles utiliza a noção de interatividade. Wasques *et al.* [58, 56, 60] propuseram métodos numéricos para fornecer soluções para EDFs, baseando-se no conceito de interatividade entre números fuzzy. Tais métodos são extensões dos métodos clássicos de Euler e Runge-Kutta, e portanto, podem ser utilizados em qualquer equação diferencial fuzzy n-dimensional.

Esse texto está dividido da seguinte forma. Na Seção 2 são fornecidos os conceitos básicos necessários para o melhor entendimento e compreensão da teoria de cálculo fuzzy. A Seção 3 se dedica ao aprofundamento da relação de interatividade entre números fuzzy. Na Seção 4 um estudo aprofundado sobre Cálculo Diferencial e Integral Fuzzy em $\mathbb{R}_{F(A)}$ é apresentado. Na Seção 5 as consequências do uso da interatividade em Equações Diferenciais sob $\mathbb{R}_{F(A)}$ são discutidas. Por fim,

a Seção 6 encerra o estudo através do uso de uma interatividade proveniente de uma família de distribuições J_γ e suas aplicações em equações diferenciais fuzzy.

2 Preliminares

Esta seção revisa alguns conceitos básicos e notações da teoria de conjuntos fuzzy e números fuzzy que serão usados ao longo deste minicurso.

Um (sub)conjunto A de um universo $X \neq \emptyset$ é descrito por sua função de pertinência $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$, sendo que $\mu_A(x)$ significa o grau que x pertence a A . Por conveniência denotaremos $\mu_A(x)$ por $A(x)$. Usamos o símbolo $\mathbb{F}(X)$ para denotar o conjunto de todos os subconjuntos fuzzy de X . Os α -níveis de um subconjunto fuzzy A são subconjuntos clássicos definidos por:

$[A]_\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$ para $0 < \alpha \leq 1$ e, quando X é um espaço topológico, por exemplo $X = \mathbb{R}^n$, $[A]_0 = \{x \in U : A(x) > 0\}$. Vamos focar numa classe particular de conjuntos fuzzy de \mathbb{R} chamada números fuzzy, que será denotada por \mathbb{R}_F .

O número fuzzy generaliza o número real clássico e é uma ferramenta importante em aplicações de conjuntos fuzzy e lógica fuzzy.

Definição 1 (Número Fuzzy). [5, 16] *Um subconjunto fuzzy A de \mathbb{R} é um número fuzzy se*

- i. todos os seus α -níveis são intervalos fechados e não-vazios de \mathbb{R} , e*
- ii. o suporte de A , $\text{supp}(A) = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$, é limitado.*

Denotamos os α -níveis de um número fuzzy A por $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $\alpha \in [0, 1]$. O comprimento (*length*) do α -nível de A é definido por

$$\text{len}([A]_\alpha) = a_\alpha^+ - a_\alpha^-, \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

O diâmetro de A é definido como $\text{diam}(A) = \text{len}([A]_0)$.

A família dos números fuzzy, cujas funções $a_\alpha^-, a_\alpha^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas com respeito a α , é denotada por \mathbb{R}_{FC} . Um tipo de número fuzzy que pertence a família \mathbb{R}_{FC} é o número fuzzy triangular. Ele é denotado pela tripla $(a; b; c)$ com $a \leq b \leq c$ e seus α -níveis são dados por

$$[a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)], \forall \alpha \in [0, 1].$$

Na Figura 1 podemos ver o número fuzzy triangular $A = (3, 5; 4; 4, 5)$.

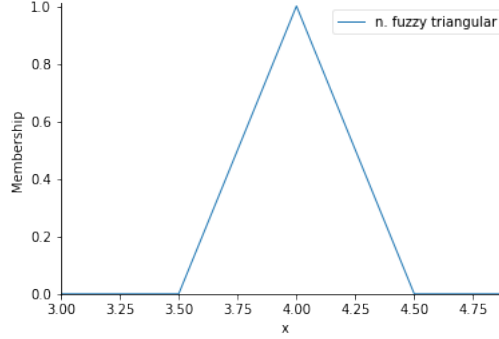


Figura 1: Número fuzzy triangular $A = (3, 5; 4; 4, 5)$.

Definição 2. [13] A métrica d_∞ em \mathbb{R}_F é definida para cada $A \in \mathbb{R}_F$ e $B \in \mathbb{R}_F$ como segue:

$$d_\infty(A, B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|a_\alpha^- - b_\alpha^-|, |a_\alpha^+ - b_\alpha^+|\}.$$

A norma de um número A é definida por $\|A\| = d_\infty(A, 0)$.

O princípio de extensão de Zadeh é uma ferramenta matemática usada para estender funções clássicas para um domínio fuzzy. Considere $f : X \rightarrow Y$ e $A \in \mathbb{F}(X)$. A extensão de Zadeh de f em A é o conjunto fuzzy $\hat{f}(A) \in \mathbb{F}(Y)$ dado por [61]

$$\hat{f}(A)(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} A(x) \quad (1)$$

sendo $f^{-1}(y)$ denominado pré-imagem de y pela função f , isto é, $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Por definição, $\sup \emptyset = 0$. O princípio de extensão de Zadeh também pode ser definido para funções com múltiplos argumentos como veremos a seguir.

Considere $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ e $A_i \in \mathbb{F}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$. O princípio de extensão de Zadeh de f em (A_1, \dots, A_n) é o conjunto fuzzy $\hat{f}(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{F}(Y)$ dado por

$$\hat{f}(A_1, \dots, A_n)(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\}. \quad (2)$$

O próximo resultado nos permite caracterizar os α -níveis da extensão de Zadeh de uma função contínua em termos dos α -níveis de seus argumentos.

Teorema 1. [6, 32]

(a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $A \in \mathbb{R}_F$, então $\hat{f}(A) \in \mathbb{R}_F$, e

$$[\hat{f}(A)]_\alpha = f([A]_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

(b) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $A_i \in \mathbb{R}_F$, $i = 1, \dots, n$, então $\hat{f}(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}_F$, e

$$[\hat{f}(A_1, A_2, \dots, A_n)]_\alpha = f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

O princípio de extensão de Zadeh pode ser usado para definir operações aritméticas para números fuzzy.

Definição 3 (Aritmética usual para números fuzzy). *Considere $A, B \in \mathbb{R}_F$.*

1. A soma de A e B é dada por $A + B = \hat{+}(A, B)$, sendo $+(a, b) = a + b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
2. A diferença entre A e B é dada por $A - B = \hat{-}(A, B)$, sendo $-(a, b) = a - b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
3. A multiplicação entre A e B é dada por $A \cdot B = \hat{\cdot}(A, B)$, sendo $\cdot(a, b) = ab$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Se $A = \lambda \in \mathbb{R}$, então chamamos de multiplicação por escalar e denotamos por λB .
4. A divisão de A por B , $0 \notin [B]_0$, é dada por $A \div B = \hat{\div}(A, B)$, sendo $\div(a, b) = a \div b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

onde $\hat{\otimes}$ é a extensão de Zadeh da operação $\otimes \in \{+, -, \cdot, \div\}$.

O resultado a seguir é uma consequência do Teorema 1 e caracteriza as operações aritmética entre números fuzzy em termos de seus α -níveis.

Proposição 2. [5, 26] *Considere $A, B \in \mathbb{R}_F$ com $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$. Para cada $\alpha \in [0, 1]$, temos*

- $[A + B]_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$.
- $[A - B]_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$.
- $[A \cdot B]_\alpha = [\min Y_\alpha, \max Y_\alpha]$, sendo $Y_\alpha = \{a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+\}$.

- Se $A = \lambda \in \mathbb{R}$, então

$$[\lambda B]_\alpha = \lambda[B]_\alpha = \begin{cases} [\lambda b_\alpha^-, \lambda b_\alpha^+] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda b_\alpha^+, \lambda b_\alpha^-] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

- $[A \div B]_\alpha = [\min Z_\alpha, \max Z_\alpha]$, sendo $Z_\alpha = \left\{ \frac{a_\alpha^-}{b_\alpha^-}, \frac{a_\alpha^-}{b_\alpha^+}, \frac{a_\alpha^+}{b_\alpha^-}, \frac{a_\alpha^+}{b_\alpha^+} \right\}$ se $0 \notin [B]_0$.

Exemplo 1. Considere $\lambda = 2$ e os números fuzzy triangulares $A = (-1; 0; 1)$ e $B = (1; 2; 4)$. Como $[A]_\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ e $[B]_\alpha = [1 + \alpha, 4 - 2\alpha]$, tem-se

- $[A + B]_\alpha = [2\alpha, 5 - 3\alpha]$.
- $[A - B]_\alpha = [3\alpha - 5, -2\alpha]$.
- $[A - A]_\alpha = [\alpha - 2, 2 - \alpha] \neq [0, 0]$.
- $[A \cdot B]_\alpha = [-2(\alpha - 1)(\alpha - 2), 2(\alpha - 1)(\alpha - 2)]$.
- $[2B]_\alpha = 2[B]_\alpha = [2(1 + \alpha), 2(4 - 2\alpha)]$.
- $[A \div B]_\alpha = [(\alpha - 1)/(1 + \alpha), (1 - \alpha)/(1 + \alpha)]$.
- $[B \div B]_\alpha = [(1 + \alpha)/(4 - 2\alpha), (4 - 2\alpha)/(1 + \alpha)] \neq [1, 1]$.

No Exemplo 1, vemos que $A - A = A + (-A) \neq 0$, isto é, não existe inverso aditivo. Desta forma, o espaço de números fuzzy com a aritmética usual não satisfaz a estrutura algébrica de um espaço vetorial.

Para contornar esta situação, foram propostas outras definições de subtração. Entre as principais destacamos a diferença de Hukuhara e suas extensões.

Definição 4. [40] Sejam $A, B \in \mathbb{R}_F$. O número fuzzy D é a diferença de Hukuhara de A e B , denotada por $D = B -_H A$, se

$$D = B -_H A \Leftrightarrow B = A + D.$$

Note que se $B -_H A$ existe, então $len[B]_\alpha > len[A]_\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Com o intuito de contornar a restrição acima foi proposta a noção de diferença generalizada de Hukuhara.

Definição 5. [49] Sejam $A, B \in \mathbb{R}_F$, a diferença generalizada de Hukuhara (ou gH -diferença) é o número fuzzy D , se ele existe, tal que

$$B -_{gH} A = D \iff \left\{ \begin{array}{l} B = A + D \\ \text{ou } A = B - D \end{array} \right. ,$$

sendo que “+” e “-” representam, respectivamente, a soma e subtração usual de números fuzzy.

Se $B -_{gH} A$ existe, então [8]

$$[B -_{gH} A]_\alpha = [\min\{b_\alpha^- - a_\alpha^-, b_\alpha^+ - a_\alpha^+\}, \max\{b_\alpha^- - a_\alpha^-, b_\alpha^+ - a_\alpha^+\}]. \quad (3)$$

Definição 6. [8] Um número fuzzy $P \in \mathbb{R}_F$ é considerado positivo (resp. negativo) se seu conjunto de nível 1, $[p_1^-, p_1^+]$, está à direita (resp. Esquerda) de $0 \in \mathbb{R}$, ou seja, se $p_1^- \geq 0$ (resp. $p_1^+ \leq 0$).

Proposição 3. [3, 4] Se B e C são números fuzzy positivos, então $P = B \odot C$ é definido por $[P]_\alpha = [p_\alpha^-, p_\alpha^+]$, onde

$$p_\alpha^- = b_\alpha^- c_1^- + b_1^- c_\alpha^- - b_1^- c_1^- \text{ e } p_\alpha^+ = b_\alpha^+ c_1^+ + b_1^+ c_\alpha^+ - b_1^+ c_1^+ \quad (4)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, é um número fuzzy positivo.

A operação binária \odot em \mathbb{R}_F dada na Proposição 3 é chamada de produto cruzado entre os números fuzzy B e C .

Definição 7. [3, 4] O produto cruzado é definido para quaisquer números fuzzy cujo 1-nível contém apenas um elemento, ou seja,

$$\hat{\mathbb{R}}_F = \{A \in \mathbb{R}_F : [A]_1 \text{ tem apenas um elemento}\}. \quad (5)$$

Na Proposição 3, podemos escrever $b_1^- = b_1^+ = b_1$ e $c_1^- = c_1^+ = c_1$.

Note que o produto cruzado entre B e C é a extensão de Zadeh da linearização de $f(x, y) = xy$ em torno de (b_1, c_1) , isto é, da função linear $\hat{L}(B, C)$, onde $L(x, y) = c_1 x + b_1 y - b_1 c_1$. [27].

A seguir vamos apresentar algumas integrais para funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$.

A noção de integral de Aumann fuzzy foi introduzida por Puri e Ralescu [41].

Definição 8. (*Integral de Aumann*) [41, 25] Considere a função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$. A integral de Aumann F sobre $[a, b]$, denotada por $(FA) \int_a^b F(t)dt$, é definida através de seus α -níveis:

$$\begin{aligned} \left[(FA) \int_a^b F(t)dt \right]_\alpha &= (A) \int_a^b [F(t)]_\alpha dt = (A) \int_a^b [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)] dt \\ &= \left\{ \int_a^b y(t)dt \mid y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é uma seleção mensurável de } [F(\cdot)]_\alpha \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, sempre que (6) define um número fuzzy.

De acordo com [25, 41], uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ é dita ser fortemente mensurável se, para cada $\alpha \in [0, 1]$, $F_\alpha(t) = [F(t)]_\alpha$ é (Lebesgue) mensurável em $[a, b]$ com a métrica d_∞ . Além disso, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ é dita ser integrável e limitada se houver uma função integrável $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\| F(t) \| \leq h(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Proposição 4. [25] Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ é uma função fortemente mensurável, limitada e integrável, então F é uma integral de Aumann fuzzy sobre $[a, b]$.

De acordo com a Observação 4.2 de [25], se a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$ é Aumann fuzzy integrável em $[a, b]$, então as integrais das funções f_α^- e f_α^+ sobre $[a, b]$ existem and satisfazem a igualdade:

$$\left[(FA) \int_a^b F(t)dt \right]_\alpha = \left[\int_a^b f_\alpha^-(t)dt, \int_a^b f_\alpha^+(t)dt \right], \quad (7)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Além da noção de integral de Aumann fuzzy, existem outros conceitos de integrabilidade fuzzy.

Definição 9. (*Integral de Riemann Fuzzy*) [22] Uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ é dita ser Riemann fuzzy integrável se existe $S \in \mathbb{R}_F$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ com $t_i - t_{i-1} < \delta$, $i = 1, \dots, n$, tem-se

$$d_\infty \left(\sum_{i=1}^n F(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), S \right) < \epsilon,$$

sendo $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, e a somatória é dada em termos de adição usual. Nesse caso, S é a integral de Riemann fuzzy de F sobre $[a, b]$ e é denotada por $(FR) \int_a^b F(s)ds$.

A próxima proposição mostra que as integrais de Aumann e de Riemann fuzzy coincidem quando a função integrante é contínua.

Proposição 5. [8] *Se $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_F$ é uma função contínua, então as integrais de Aumann e Riemann fuzzy de F existem e são iguais, isto é,*

$$(FA) \int_a^b F(s)ds = (FR) \int_a^b F(s)ds.$$

3 Interatividade Fuzzy

O conceito de interatividade entre dois conjuntos fuzzy foi proposto por Zadeh [62] e desempenha um papel análogo ao conceito de dependência e independência de variáveis aleatórias. A interatividade entre dois números fuzzy se dá por meio de uma distribuição de possibilidade conjunta (ou associação conjunta) [14].

As operações usuais entre números fuzzy são obtidas através do princípio de extensão de Zadeh que é definido em termos da t-norma do mínimo. Podemos generalizar tais operações se consideramos outras t-normas na Equação (2). Mais geralmente, por meio de uma distribuição de possibilidade conjunta.

Definição 10. (Distribuição de possibilidade conjunta (DPC)) [12, 21] *Um conjunto fuzzy $J \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta (DPC) para $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}_F$ se cada A_i é a projeção de J , isto é,*

$$A_i = P_i(J)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x_i=y} J(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Definição 11. [14] *Os números fuzzy A_1, \dots, A_n são não interativos se sua DPC é dada por $J(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1(x_1) \wedge \dots \wedge A_n(x_n)$ e, dessa forma, $[J]_\alpha = [A_1]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$. Caso contrário, A_1, \dots, A_n são chamados de J -interativos ou, simplesmente, interativos e, neste caso, $[J]_\alpha \subset [A_1]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$.*

Denotamos a família de distribuições de possibilidades conjuntas de \mathbb{R}^n pelo símbolo $\mathbb{F}_J(\mathbb{R}^n)$.

Se $J \in \mathbb{F}_J(\mathbb{R}^2)$, então J é uma DPC de $A \in \mathbb{R}_F$ e $B \in \mathbb{R}_F$ desde que

$$\max_{x_2} J(x_1, x_2) = A(x_1) \text{ e } \max_{x_1} J(x_1, x_2) = B(x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

Neste caso, A e B também são chamadas de distribuições de possibilidade marginal de J . A Figura 2 ilustra uma distribuição de possibilidade conjunta arbitrária J com distribuições de possibilidade marginais A e B .

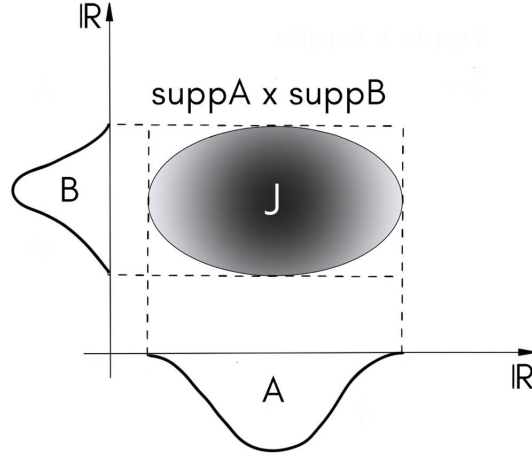


Figura 2: Uma distribuição de possibilidade conjunta J de $A \in \mathbb{R}_F$ e $B \in \mathbb{R}_F$.

Sejam A e B números fuzzy J -interativos e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. De acordo com [12, 21], a extensão sup- J de f em (A, B) é o conjunto fuzzy $f_J(A, B)$ de \mathbb{R} tal que

$$f_J(A, B)(z) = \hat{f}(J)(z) = \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} J(x, y), \forall z \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

sendo $f^{-1}(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = f(x, y)\}$.

Teorema 6. [6, 20, 32] *Sejam $A, B \in \mathbb{R}_F$, J uma DPC cuja as distribuições de possibilidades marginais são dadas por A e B de forma que cada $[J]_\alpha$ é um conjunto não vazio, conexo e compacto. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f_J : \mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}_F$ é bem definida e*

$$[f_J(A, B)]_\alpha = f([J]_\alpha) \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]. \quad (10)$$

Para definir as operações aritméticas entre números fuzzy interativos basta substituir o princípio de extensão de Zadeh (Equação (2)) pelo princípio sup- J (Equação (9)).

Segundo [11], se existe uma função $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a DPC J é dada por

$$J(x, y) = A(x)\chi_{\{(u,v); v=\mathcal{F}(u)\}}(x, y) = B(y)\chi_{\{(u,v); v=\mathcal{F}(u)\}}(x, y), \quad (11)$$

então os números fuzzy A e B são chamados de \mathcal{F} -interativos. Uma vez que J satisfaz $P_2(J) = B$, pode-se mostrar que (11) é equivalente a $B = \hat{\mathcal{F}}(A)$, isto é

$$B(y) = \sup_{z \in \mathcal{F}^{-1}(y)} \mu_A(z) \quad (12)$$

para todo $z \in \mathbb{R}$. Logo, se \mathcal{F} é uma função contínua, do Teorema 1, temos que os α -níveis são dados por

$$[B]_\alpha = \mathcal{F}([A]_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Se \mathcal{F} invertível, então $A = \mathcal{F}^{-1}(B)$ e, neste caso,

$$[J]_\alpha = \{(x, \mathcal{F}(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in [A]_\alpha\} = \{(\mathcal{F}^{-1}(y), y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [B]_\alpha\}. \quad (13)$$

Tudo isso dito, temos que, se A e B são números fuzzy \mathcal{F} -interativos, então as operações aritméticas $B \otimes_{\mathcal{F}} A$ são definidas por

$$(B \otimes_{\mathcal{F}} A)(y) = \sup_{x \in \Phi_{\otimes}^{-1}(y)} A(x) \quad (14)$$

sendo $\Phi_{\otimes}^{-1}(y) = \{x | y = x \otimes z, z = \mathcal{F}(x)\}$, e $\otimes \in \{+, -, \times, \div\}$. Pelo Teorema 6, se \mathcal{F} é uma função contínua, então temos, $\forall \alpha \in [0, 1]$,

- $[B +_{\mathcal{F}} A]_\alpha = \{\mathcal{F}(x) + x \in \mathbb{R} | x \in [A]_\alpha\}$;
- $[B -_{\mathcal{F}} A]_\alpha = \{\mathcal{F}(x) - x \in \mathbb{R} | x \in [A]_\alpha\}$;
- $[B \cdot_{\mathcal{F}} A]_\alpha = \{x\mathcal{F}(x) \in \mathbb{R} | x \in [A]_\alpha\}$;
- $[B \div_{\mathcal{F}} A]_\alpha = \{\mathcal{F}(x) \div x \in \mathbb{R} | x \in [A]_\alpha\}, 0 \notin [A]_0$.

A multiplicação por escalar λB com $B = \mathcal{F}(A)$ é dada por

$$[\lambda B]_\alpha = [\lambda \hat{\mathcal{F}}(A)]_\alpha = \lambda \mathcal{F}([A]_\alpha) = \{\lambda \mathcal{F}(x) \in \mathbb{R} | x \in [A]_\alpha\}.$$

Ademais, se \mathcal{F} é diferenciável em $[A]_0$, então

$$[B +_{\mathcal{F}} A]_\alpha = \begin{cases} [b_\alpha^- + a_\alpha^-, b_\alpha^+ + a_\alpha^+] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) \geq 0 \\ [b_\alpha^+ + a_\alpha^-, b_\alpha^- + a_\alpha^+] & , \text{ se } -1 \leq \mathcal{F}'(x) < 0 \\ [b_\alpha^- + a_\alpha^+, b_\alpha^+ + a_\alpha^-] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) < -1 \end{cases}, \quad \forall x \in [A]_\alpha \quad (15)$$

e

$$[B -_{\mathcal{F}} A]_\alpha = \begin{cases} [b_\alpha^- - a_\alpha^-, b_\alpha^+ - a_\alpha^+] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) \geq 1 \\ [b_\alpha^+ - a_\alpha^+, b_\alpha^- - a_\alpha^-] & , \text{ se } 0 \leq \mathcal{F}'(x) < 1 \\ [b_\alpha^- - a_\alpha^+, b_\alpha^+ - a_\alpha^-] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) < 0 \end{cases}, \quad \forall z \in [A]_\alpha. \quad (16)$$

Da Equação (3), observamos que $B -_{\mathcal{F}} A$ coincide com $B -_{gH} A$ se $\mathcal{F}'(x) \geq 0$ para todo $x \in [A]_0$. Isto ocorre porque a gH -diferença é uma subtração interativa

[59]. Por outro lado, se $\mathcal{F}'(x) < 0$ para todo $x \in [A]_0$, temos que $B -_{\mathcal{F}} A$ coincide a diferença usual. Similarmente, da Proposição 2, se $\mathcal{F}'(x) \geq 0$ para todo $x \in [A]_0$, então $B +_{\mathcal{F}} A$ coincide com a soma usual $B + A$. O mesmo não ocorre para $B \cdot_{\mathcal{F}} A$ e $B \div_{\mathcal{F}} A$.

Um caso particular da \mathcal{F} -interatividade é quando consideramos $\mathcal{F}(x) = qx + r$ como veremos a seguir.

Definição 12. [12] *Os números fuzzy A, B são linearmente interativos (ou linearmente correlacionados) se existem $q, r \in \mathbb{R}$ tais que a correspondente DPC J de A e B é dada por*

$$J(x, y) = A(x)\chi_{\{(u,v); v=\mathcal{L}(u)\}}(x, y) = B(y)\chi_{\{(u,v); v=\mathcal{L}(u)\}}(x, y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, sendo $\mathcal{L}(u) = qu + r$. Ademais, se $q > 0$ ($q < 0$) então dizemos que a correlação é positiva (negativa).

Da Equação (13), os α -níveis da DPC J na Definição 12 pode ser reescrita como:

$$[J]_{\alpha} = \{(x, qx + r) \mid x \in [A]_{\alpha}\}.$$

Uma vez que cada $[J]_{\alpha}$ é um conjunto conexo e compacto de \mathbb{R}^2 , temos que $B = qA + r$, isto é, B é a extensão de Zadeh da função $\mathcal{L} = qu + r$ aplicada ao número fuzzy A (ver [7]). Assim, $[B]_{\alpha} = q[A]_{\alpha} + r$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Além disso, se $q = 0$ então temos que $B = r \in \mathbb{R}$ é linearmente interativo com $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, desde que $B = r = 0 \cdot A + r$.

Como consequência do Teorema 6 temos que, para todo $\alpha \in [0, 1]$

- $[B +_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = (q + 1)[A]_{\alpha} + r$;
- $[B -_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = (q - 1)[A]_{\alpha} + r$;
- $[B \cdot_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \{qx^2 + rx_1 \in \mathbb{R} \mid x \in [A]_{\alpha}\}$;
- $[B \div_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \{q + \frac{r}{x} \in \mathbb{R} \mid x \in [A]_{\alpha}\}, 0 \notin [A]_0$.

Note que $B +_{\mathcal{L}} A = r$ se $q = -1$ [12].

Consequentemente, se $\mathcal{F}(u) = \mathcal{L}(u) = qu + r$, nas equações (15) e (16), temos que [7]

$$[B +_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \begin{cases} [b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } q \geq 0 \\ [b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } -1 \leq q < 0 \\ [b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } q < -1 \end{cases}$$

e

$$[B -_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \begin{cases} [b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } q \geq 1 \\ [b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } 0 \leq q < 1 \\ [b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } q < 0 \end{cases} .$$

Exemplo 2. Considere os números fuzzy triangulares $A = (-1; 0; 1)$ com $[A]_{\alpha} = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ e $B = 0, 5 \cdot A - 2 = (-2, 5; -2; -1, 5)$. Dessa forma,

- $[B +_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = (1, 5)[A]_{\alpha} - 2 = [1, 5\alpha - 3, 5, -0, 5 - 1, 5\alpha];$
- $[B -_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = (-0, 5)[A]_{\alpha} - 2 = [0, 5\alpha - 2, 5, -1, 5 - 0, 5\alpha];$
- $[A -_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = (1 - 1)[A]_{\alpha} + 0 = [0, 0] = 0;$
- $[B \cdot_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = [0, 5\alpha^2 + \alpha - 1, 5, 0, 5\alpha^2 - 3\alpha + 2, 5];$
- $[B \div B]_{\alpha} = \{1 + \frac{0}{x} \in \mathbb{R} | x \in [B]_{\alpha}\} = [1, 1] = 1.$

Finalizamos essa seção com o conceito de número fuzzy simétrico. Tal conceito é usado para estabelecer uma classe de números fuzzy interativos que forma um espaço de Banach de números fuzzy.

Definição 13. Dizemos que $A \in \mathbb{R}_F$ é simétrico em relação a $x \in \mathbb{R}$ se $A(x - y) = A(x + y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Neste caso, denotamos $(A|x)$. Se não houver $x \in \mathbb{R}$ tal que A seja simétrico, dizemos que A é não simétrico.

3.1 Números fuzzy A -correlacionados

Para um dado número fuzzy A , o conjunto de todos os números fuzzy linearmente correlacionados com A é dado por [7, 17]

$$\mathbb{R}_{F(A)} = \{B \in \mathbb{R}_F : [B]_{\alpha} = q[A]_{\alpha} + r, \forall \alpha \in [0, 1]\}. \quad (17)$$

Note que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{F(A)}$.

Quando $A \in \mathbb{R}_F$ é não simétrico, a função $\Psi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é um isomorfismo, de modo que Ψ_A induz uma soma $+_{\Psi_A}$ e multiplicação por escalar \cdot_{Ψ_A} , onde $+_{\Psi_A}$ e \cdot_{Ψ_A} são dados por

- $B +_{\Psi_A} C = \Psi_A(\Psi_A^{-1}(B) + \Psi_A^{-1}(C)), \forall B, C \in \mathbb{R}_{F(A)};$
- $\gamma \cdot_{\Psi_A} B = \Psi_A(\gamma \Psi_A^{-1}(B)), \forall B \in \mathbb{R}_{F(A)} \text{ e } \forall \gamma \in \mathbb{R}.$

Assim, temos que $(\mathbb{R}_{F(A)}, +_{\Psi_A}, \cdot_{\Psi_A})$ é um espaço de Banach de dimensão 2 sobre \mathbb{R} [17]. Note que, para $q, r \in \mathbb{R}$, temos que $q \cdot_{\Psi_A} A +_{\Psi_A} r = qA + r$, sendo que $+$ e \cdot denotam, respectivamente, a soma e produto por escalar usuais de números fuzzy.

Observe também que se $A \in \mathbb{R}_F$ é não-simétrico e $B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$, definidos, respectivamente, por $B = qA + r$ e $C = mA + n$, então

- $B +_{\Psi_A} C = (q + m)A + (r + n)$;
- $B -_{\Psi_A} C = (q - m)A + (r - n)$;
- $B -_{\Psi_B} B = (q - q)A + (r - r) = 0A + 0 = 0$.

A soma entre dois números fuzzy A -linearmente correlacionados sempre produz um número fuzzy cujo diâmetro não excede o diâmetro da soma usual em \mathbb{R}_F , ou seja, $B +_{\Psi_A} C \subseteq B + C, \forall B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$. Em particular, $\lambda \cdot_{\Psi_A} B = \lambda \cdot B$ [17].

A norma $\|B\|_{\Psi_A}$ é dada por

$$\|B\|_{\Psi_A} = \|\Psi_A^{-1}(B)\|_{\infty} \quad (18)$$

e, é fácil ver que, $\forall B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$, a norma $\|\cdot\|_{\Psi_A}$ induz a métrica $d_{\Psi_A}(B, C) = \|B -_{\Psi_A} C\|_{\Psi_A}$ em $\mathbb{R}_{F(A)}$.

Definição 14 (A -Produto cruzado [27, 28, 30]). *Seja $A \in \hat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico. O Ψ_A -produto cruzado entre B e C é definido por*

$$P = B \odot_{\Psi_A} C = c_1 B +_{\Psi_A} b_1 C -_{\Psi_A} b_1 c_1, \quad (19)$$

onde $+_{\Psi_A} (-_{\Psi_A})$ representa a soma (subtração) em $\mathbb{R}_{F(A)}$, $[B]_1 = \{b_1\}$, $[C]_1 = \{c_1\}$ e $P \in \mathbb{R}_{F(A)}$.

Considere $A \in \hat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico com $[A]_1 = \{a_1\} \neq 0$, $B = qA + r$ e $[B]_1 = \{b_1\}$. De (19), vemos que se

$$B_{\Psi_A}^{-1} = \left(-\frac{q}{b_1^2}\right) A + \left(\frac{2}{b_1} - \frac{r}{b_1^2}\right) \text{ com } b_1 = qa_1 + r$$

então $B \odot_{\Psi_A} B_{\Psi_A}^{-1} = B_{\Psi_A}^{-1} \odot_{\Psi_A} B = 1$. [27, 28, 30].

Definição 15. [27, 28, 30] *Seja $A \in \hat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico. A Ψ_A -divisão entre B e C é definida por*

$$B \div_{\Psi_A} C = B \odot_{\Psi_A} C_{\Psi_A}^{-1}, \quad (20)$$

sempre que $[C]_1 \neq 0$.

Na Definição 15, vemos que a Ψ_A -divisão entre dois números fuzzy A -linearmente correlacionados é uma extensão direta da divisão entre números reais, isto é, se $A, B \in \mathbb{R}$, então $A \div_{\Psi_A} B = a \div b$ sempre que $b \neq 0$. Assim, a divisão coincide com a divisão clássica quando os elementos envolvidos são crisp.

Exemplo 3. Considere $A \in \hat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico e $B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$, dados, respectivamente, por $B = qA + r$ e $C = mA + n$. Sendo assim, $[B]_1 = \{b\} = \{qa + r\}$ e $[C]_1 = \{c\} = \{ma + n\}$, com $[A]_1 = \{a\}$. Logo,

$$\begin{aligned} B \odot_{\Psi_A} C &= (cq + bm)A + (cr + bn - bc) \\ &\quad (2aqm + qn + mr)A + (rn - a^2qm). \end{aligned}$$

4 Cálculo Diferencial e Integral Fuzzy em $\mathbb{R}_{F(A)}$

Nesta seção vamos apresentar uma forma prática para calcular derivada e integral de processos fuzzy A -linearmente correlacionados $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, definidos por

$$F(t) = \Psi_A(q(t), r(t)) = q(t)A + r(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico e $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, tais que

$$F(t) = \Psi_A(q_F(t), r_F(t)) = q_F(t)A + r_F(t)$$

e

$$G(t) = \Psi_A(q_G(t), r_G(t)) = q_G(t)A + r_G(t).$$

A adição e subtração entre F e G , a multiplicação por escalar e o produto curzado entre F e G são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (F \pm_{\Psi_A} G)(t) &= F(t) \pm_{\Psi_A} G(t), \\ (\lambda \cdot_{\Psi_A} F)(t) &= \lambda \cdot_{\Psi_A} F(t) = \lambda F(t) \\ (F \odot_{\Psi_A} G)(t) &= F(t) \odot_{\Psi_A} G(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in [a, b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 7. [17] Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ dada por $F(t) = q(t)A + r(t)$. Se as funções $q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em \mathbb{R} então a função F é contínua na métrica d_∞ .

Teorema 8. [17] Se a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é limitada, então $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas.

Teorema 9. [17] Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, dada por $F(t) = q(t)A + r(t)$, é Fréchet diferenciável, então é contínua.

4.1 Derivada Interativa

Definição 16 (Ψ -derivada). [15] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é Ψ -diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se existir um número fuzzy $F'(t_0) \in \mathbb{R}_{F(A)}$ tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(t_0 + h) -_{\Psi_A} F(t_0)) = F'(t_0).$$

Neste caso, dizemos que $F'(t_0)$ é a Ψ -derivada de F em t_0 . Além disso, F é Ψ -diferenciável em $[a, b]$ se $F'(t)$ existe para todo $t \in [a, b]$.

A seguir, vemos que a derivada de Fréchet de processos fuzzy A -linearmente correlacionados está bem definida.

Teorema 10. [17] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. Sejam $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ tais que $F(t) = \Psi_A(q(t), r(t))$, para todo $t_0 \in [a, b]$. A função F é Fréchet diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se, e somente se, existem $q'(t_0)$ e $r'(t_0)$. Adicionalmente, $F'[t_0](h) = \Psi_A(q'(t_0)h, r'(t_0)h) = q'(t_0)hA + r'(t_0)h$, para todo $h \in \mathbb{R}$.*

Teorema 11. [15] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é Ψ -diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se, e somente se, é Fréchet diferenciável em $t_0 \in [a, b]$.*

Corolário 12. [15] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é Ψ -diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se, e somente se, $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis em t_0 . Além disso,*

$$F'(t_0) = \Psi_A(q'(t_0), r'(t_0)) = q'(t_0)A + r'(t_0).$$

Exemplo 4. *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico e $F(t) = \Psi_A(t, 0) = At$. Nesse caso, a Ψ -derivada de F é dada por $F'(t) = \Psi_A(1, 0) = A$.*

Exemplo 5. *Seja $F(t) = \Psi_A(\sin t, t) = A \sin t + t$. A Ψ -derivada de F é dada por $F'(t) = \Psi_A(\cos t, 1) = A \cos t + 1$.*

A Figura 3 representa a função F e a função $F'(t)$.

Teorema 13. [17] *Sejam $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Ψ -diferenciáveis e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $(F +_{\Psi_A} G)'(t) = F'(t) +_{\Psi_A} G'(t)$ e $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$.*

Teorema 14 (Regra do produto). [47] *Sejam $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Ψ -diferenciáveis, então*

$$(F(t) \odot_{\Psi_A} G(t))' = F'(t) \odot_{\Psi_A} G(t) +_{\Psi_A} F(t) \odot_{\Psi_A} G'(t);$$

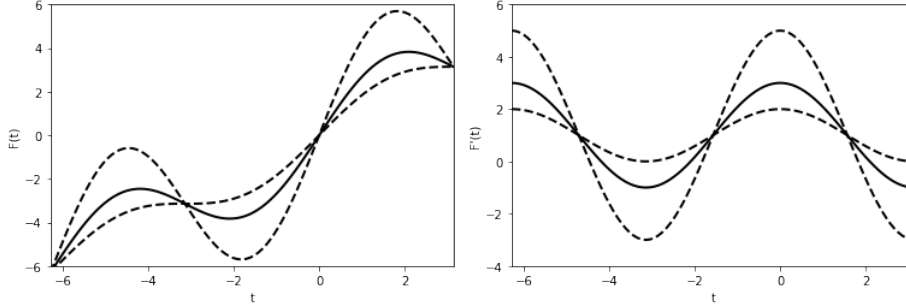


Figura 3: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível de $F(t)$ e $F'(t)$ do Exemplo 5, respectivamente, com $A = (1; 2; 4)$.

4.2 Integral Iterativa

Definição 17. [47] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. Uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é Riemann iterativa integrável (Ψ -Riemann) se existe $S \in \mathbb{R}_F$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ com $t_i - t_{i-1} < \delta$, $i = 1, \dots, n$, tem-se*

$$\left\| (\Psi_A) \sum_{i=1}^n F(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) -_{\Psi_A} S \right\|_{\Psi_A} < \epsilon. \quad (21)$$

sendo que $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, e a somatória é dada em termos da soma iterativa ($+_{\Psi_A}$). Nesse caso, S é a integral de Riemann iterativa fuzzy de F sobre $[a, b]$ e é denotada por $(\Psi_A) \int_a^b F(t) dt$.

Teorema 15. [46, 47] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, dada por $F(t) = q(t)A + r(t)$, é Ψ -Riemann integrável, se, e somente se, as funções $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são Riemann integráveis.*

$$(\Psi_A) \int_a^b F(s) ds = \left(\int_a^b q(t) dt \right) A + \int_a^b r(t) dt. \quad (22)$$

Teorema 16. [46] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ dada por $F(t) = q(t)A + r(t)$, $\forall t \in [a, b]$ Riemann integrável. Se $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então a função integral $G(t) = (\Psi_A) \int_a^t F(s) ds$ é Fréchet diferenciável e $G'(t) = F(t)$, $\forall t \in [a, b]$.*

Teorema 17. [46] *Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico, as funções $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Fréchet diferenciável. Se F' é Riemann integrável, então*

$$(\Psi_A) \int_a^t F'(s) ds = F(t) -_{\Psi_A} F(a),$$

para todo $t \in [a, b]$.

Exemplo 6. *Seja $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, tal que $F'(t) = (\cos t)A$. Logo,*

$$(\Psi_A) \int_0^t (\cos s)A ds = (\sin t)A -_{\Psi_A} (\sin 0)A = (\sin t)A.$$

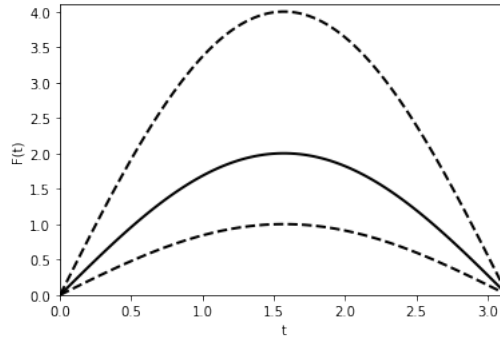


Figura 4: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível de $F(t)$ do Exemplo 6, respectivamente, com $A = (1; 2; 4)$.

Teorema 18. [47] *Sejam $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Ψ -diferenciáveis, então*

$$(\Psi_A) \int_a^b F(t) \odot_{\Psi_A} G'(t) dt = [F(t) \odot_{\Psi_A} G(t)]_a^b -_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_a^b G(t) \odot_{\Psi_A} F'(t) dt.$$

Exemplo 7. *Calcule a integral da função $(\Psi_A) \int_0^\pi H(t) dt$, sendo que $H(t) = tA \odot_{\Psi_A} \cos tA$ e $[A]_1 = \{a\}$, com $a > 0$.*

Considere $F(t) = tA$ e $G'(t) = \cos tA$. Assim, pelo Exemplo (6), temos que

$G(t) = \sin tA$. Logo, pelo Teorema 18, temos que

$$\begin{aligned}
 (\Psi_A) \int_0^\pi H(t)dt &= [tA \odot_{\Psi_A} \sin tA]_0^\pi -_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_0^\pi \sin tA \odot_{\Psi_A} 1Adt \\
 &= [(2at \sin t)A + (-a^2 t \sin t)]_0^\pi \\
 -_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_0^\pi (2a \sin t)A + (-a^2 \sin t)dt \\
 &= [0A + 0] -_{\Psi_A} [(-2a \cos t)A + (a^2 \cos t)]_0^\pi \\
 &= [0A + 0] -_{\Psi_A} [(4a)A + (-2a^2)] = (-4a)A + (2a^2).
 \end{aligned}$$

4.2.1 Métodos Numéricos

Nem sempre é possível calcular a integral analiticamente. O motivo pode ser o integrando muito complicado, a falta de uma expressão analítica para a integral ou o integrando sendo conhecido em apenas alguns pontos, ou seja, apenas amostras do integrando estão disponíveis. Por estas razões iremos apresentar alguns métodos numéricos de integração.

Definição 18 (Ψ -Regra do trapézio). [47] A Ψ -Regra do trapézio é dada por

$$(\Psi_A) \int_a^b F(t)dt \approx \frac{h}{2}[F(a) +_{\Psi_A} F(b)] \equiv Q_T[F] \quad (23)$$

onde $b - a = h$. Isto é,

$$Q_T[F] = \Psi_A(Q_T[q], Q_T[r]) = Q_T[q]A + Q_T[r],$$

onde $Q_T[q]$ e $Q_T[r]$ são as regras do trapézio para as funções q e r sobre $[a, b]$, respectivamente.

O erro de aproximação em (23) é dado por

$$E_T[F] = -\frac{h^3}{12}\Psi_A(q''(t_q), r''(t_r)) = -\frac{h^3}{12}[q''(t_q)A + r''(t_r)]. \quad (24)$$

para algum $t_q, t_r \in [a, b]$.

Definição 19 (Ψ -Regra de Simpson). [47] *Considere os três pontos de interpolação $t_0 = a$, $t_1 = a + h$ e $t_2 = a + 2h = b$, onde $h = \frac{b-a}{2}$ é a separação entre pontos consecutivos. Logo, a Ψ -Regra de Simpson é dada por*

$$(\Psi_A) \int_a^b F(t)dt \approx \frac{h}{3} (F(t_0) +_{\Psi_A} 4F(t_1) +_{\Psi_A} F(t_2)) \equiv Q_S[F] \quad (25)$$

Isto é,

$$Q_S[F] = \Psi_A(Q_S[q], Q_S[r]) = Q_S[q]A + Q_S[r],$$

onde $Q_S[q]$ e $Q_S[r]$ são as regras de Simpson para as funções q e r sobre $[a, b]$, respectivamente.

O erro de aproximação em (25) é dado por

$$E_S[f] = -\frac{h^5}{90} \Psi_A (q^{(4)}(t_q), r^{(4)}(t_r)) = -\frac{h^5}{90} [q^{(4)}(t_q)A + r^{(4)}(t_r)]. \quad (26)$$

para algum $t_q, t_r \in [a, b]$.

5 Equações Diferenciais Ordinárias em $\mathbb{R}_{F(A)}$

Nesta seção vamos apresentar aplicações em equações diferenciais ordinárias para processos fuzzy A -linearmente correlacionados.

Considere o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(a) = X_0 \end{cases}, \quad (27)$$

sendo $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico, $F : [a, b] \times \mathbb{R}_{F(A)} \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ contínua e $X_0 \in \mathbb{R}_{F(A)}$.

Lema 19. [46] *A função $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é uma solução para o problema de valor inicial (27) se, e somente se, F é contínua e satisfaz, $\forall t \in [a, b]$, a equação integral*

$$X(t) = X_0 +_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_a^t F(s, X(s))ds. \quad (28)$$

Exemplo 8. Considere o modelo de decaimento malthusiano

$$\begin{cases} X'(t) = -\lambda X(t) \\ X(0) = \frac{1}{2}A + 2 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad (29)$$

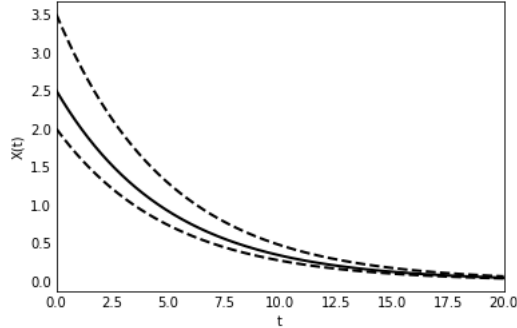


Figura 5: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (29) com $\lambda = 0.2$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (2; 2.5; 3.5)$.

sendo $\lambda > 0$.

A solução $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, se escreve como

$$X(t) = q(t)A + r(t) \quad (30)$$

sendo $q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Substituindo a Equação (30) no sistema (29), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} q'(t) = -\lambda q(t) \\ r'(t) = -\lambda r(t) \\ q(0) = \frac{1}{2} \\ r(0) = 2 \end{cases} \quad (31)$$

Resolvendo o sistema (31), obtemos a solução do PVIF (29), que é dada por

$$X(t) = \frac{1}{2} \exp(-\lambda t)A + 2 \exp(-\lambda t). \quad (32)$$

A solução do PVIF (29) pode ser vista na Figura 5, com $\lambda = 0.2$, o número fuzzy triangular $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (2; 2.5; 3.5)$.

Exemplo 9. Agora considere $\Lambda \in \mathbb{R}_{F(A)}$ no modelo de decrescimento malthusiano (29), temos

$$\begin{cases} X'(t) = -\Lambda \odot_{\Psi_A} X(t) \\ X(0) = \frac{1}{2}A + 2 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad (33)$$

sendo $\Lambda = \lambda_1 A + \lambda_2$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

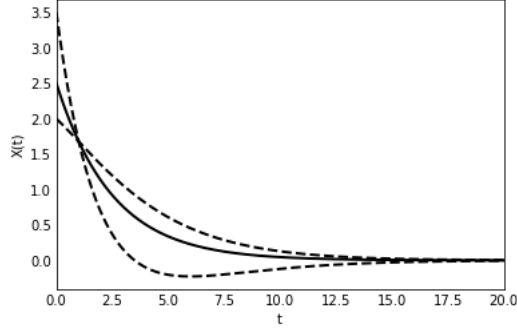


Figura 6: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (33) com $\Lambda = 0.2A + 0.2$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (2; 2.5; 3.5)$.

O produto cruzado entre Λ e $X(t)$ é dado por

$$-\Lambda \odot_{\Psi_A} X(t) = (-2a\lambda_1q(t) - \lambda_1r(t) - q(t)\lambda_2)A + (-\lambda_2r(t) + a^2\lambda_1q(t)), \quad (34)$$

onde $[A]_1 = \{a > 0\}$. Agora, usando (34) e substituindo (30) no sistema (33), obtemos o seguinte sistema correspondente

$$\begin{cases} q'(t) = -2a\lambda_1q(t) - \lambda_1r(t) - q(t)\lambda_2 \\ r'(t) = -\lambda_2r(t) + a^2\lambda_1q(t) \\ q(0) = \frac{1}{2} \\ r(0) = 2 \end{cases} \quad (35)$$

A solução do PVIF (33) é encontrada ao resolvermos numericamente o (39). A solução pode ser vista na Figura 6.

Exemplo 10. Considere o modelo de crescimento logístico com capacidade de suporte crisp

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) \odot_{\Psi_A} (k -_{\Psi_A} X(t)) \\ X(0) = \frac{1}{2}A + 1 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad (36)$$

sendo $0 < k \in \mathbb{R}$.

A solução $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, se escreve como

$$X(t) = q(t)A + r(t) \quad (37)$$

sendo $q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

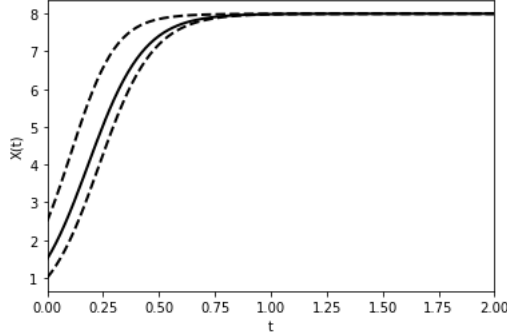


Figura 7: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (36) com $k = 8$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (1; 1.5; 2.5)$.

O produto cruzado entre $X(t)$ e $k - X(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} X(t) \odot_{\Psi_A} (k -_{\Psi_A} X(t)) &= (-2aq^2(t) + kq(t) - 2q(t)r(t))A \\ &+ (kr(t) - r^2(t) + a^2q^2(t)), \end{aligned} \quad (38)$$

onde $[A]_1 = \{a > 0\}$. Agora, usando (41) e substituindo (37) no sistema (36), obtemos o seguinte sistema correspondente

$$\begin{cases} q'(t) = -2aq^2(t) + kq(t) - 2q(t)r(t) \\ r'(t) = kr(t) - r^2(t) + a^2q^2(t) \\ q(0) = \frac{1}{2} \\ r(0) = 1. \end{cases} \quad (39)$$

A solução do PVIF (36) é encontrada ao resolvermos numericamente o (39). A solução pode ser vista na Figura 7.

Exemplo 11. Agora considere a capacidade de suporte fuzzy $K \in \mathbb{R}_{F(A)}$ em (36), temos

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) \odot_{\Psi_A} (K -_{\Psi_A} X(t)) \\ X(0) = \frac{1}{2}A + 1 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad (40)$$

onde $K = k_1A + k_2$ e $k_1, k_2 \geq 0$. Logo, o produto cruzado entre $X(t)$ e $K - X(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} X(t) \odot_{\Psi_A} (K -_{\Psi_A} X(t)) &= (2ak_1q(t) - 2aq^2(t) + k_2q(t) - 2q(t)r(t) + k_1r(t))A \\ &+ (k_2r(t) - r^2(t) - a^2k_1q(t) + a^2q^2(t)), \end{aligned} \quad (41)$$

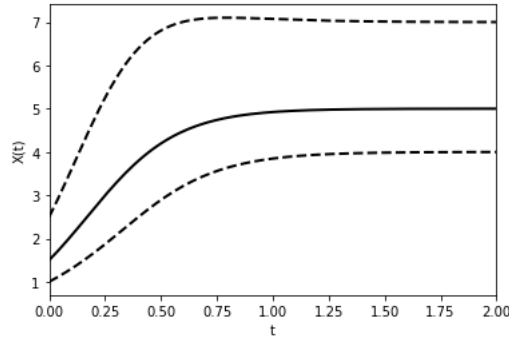


Figura 8: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (36) com $K = 1A + 4$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (1; 1.5; 2.5)$.

onde $[A]_1 = \{a > 0\}$. Assim, obtemos o seguinte sistema correspondente

$$\begin{cases} q'(t) = 2ak_1q(t) - 2aq^2(t) + k_2q(t) - 2q(t)r(t) + k_1r(t) \\ r'(t) = k_2r(t) - r^2(t) - a^2k_1q(t) + a^2q^2(t) \\ q(0) = \frac{1}{2} \\ r(0) = 1. \end{cases} \quad (42)$$

A solução do PVIF (40) é encontrada ao resolvermos numericamente o (42). A solução pode ser vista na Figura 8.

Em [30], é possível ver o estudo da equação de Hutchinson que é um caso mais geral que o modelo logístico (Exemplos 10 e 11), pois considera também delay no tempo.

6 Números Fuzzy J_γ -Interativos

Esta seção estudará um outro tipo de interatividade que é associada a uma família de distribuições de possibilidade conjunta parametrizada J_γ , em que o parâmetro γ assume valores no intervalo $[0, 1]$ e estabelece o nível de interatividade entre as variáveis fuzzy.

As distribuições J_γ são mais amplas que a DPC J_L no seguinte sentido, não há restrições quanto a forma dos números fuzzy. Por exemplo, um número fuzzy simétrico pode ser J_γ -interativo com um número fuzzy não simétrico, ou ainda, um número fuzzy triangular pode ser J_γ -interativo com um número fuzzy trapezoidal, o que não ocorre em $\mathbb{R}_{F(A)}$.

VI Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (VI CBSF)

03–05 de Novembro de 2021, São José do Rio Preto – SP, Brasil.

Para a construção desse tipo de distribuição de possibilidade conjunta, é necessário utilizar o conceito de translações de números fuzzy, introduzidos em [50]. Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{Fc}$ tais que $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Os números fuzzy transladados correspondentes são dados por

$$A^{(\bar{a})}(x) = A(x - \bar{a}) \quad \text{e} \quad B^{(\bar{b})}(x) = B(x - \bar{b}), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

em que $\bar{a} = \frac{a_1^- + a_1^+}{2}$ e $\bar{b} = \frac{b_1^- + b_1^+}{2}$ são os pontos médios dos 1-níveis de A e B , respectivamente.

Os α -níveis de $A^{(\bar{a})}$ e $B^{(\bar{b})}$ são denotados por $[A^{(\bar{a})}]_\alpha = [(a^{(\bar{a})})_\alpha^-, (a^{(\bar{a})})_\alpha^+]$ e $[B^{(\bar{b})}]_\alpha = [(b^{(\bar{b})})_\alpha^-, (b^{(\bar{b})})_\alpha^+]$, sendo $(a^{(\bar{a})})_\alpha^- = a_\alpha^- - \bar{a}$, $(a^{(\bar{a})})_\alpha^+ = a_\alpha^+ - \bar{a}$, $(b^{(\bar{b})})_\alpha^- = b_\alpha^- - \bar{b}$, e $(b^{(\bar{b})})_\alpha^+ = b_\alpha^+ - \bar{b}$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A família de distribuições de possibilidade conjunta J_γ é definida a partir da seguinte função de pertinência [18].

$$J_\gamma(x_1, x_2) = \begin{cases} \min\{A(x_1), B(x_2)\} & , \text{ se } (x_1, x_2) \in P(\gamma) \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (43)$$

em que $P(\gamma) := P_A(\gamma) \cup P_B(\gamma)$ é definida pela região onde a relação fuzzy J_γ satisfaz $J_\gamma(u, v) > 0$. O conjunto $P(\gamma)$ é dado por

$$P_A(\gamma) = \left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(\bigcup_{x \in \{a_\alpha^-, a_\alpha^+\}} \{x\} \times I_A(x, \alpha, \gamma) \right) \right)$$

e

$$P_B(\gamma) = \left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(\bigcup_{x \in \{b_\alpha^-, b_\alpha^+\}} \{x\} \times I_B(x, \alpha, \gamma) \right) \right),$$

sendo que

$$I_A(x, \alpha, \gamma) = [\bar{b} + f_A^\alpha(x) + \gamma((b^{(\bar{b})})_\alpha^- - f_A^\alpha(x)), \bar{b} + f_A^\alpha(x) + \gamma((b^{(\bar{b})})_\alpha^+ - f_A^\alpha(x))],$$

e

$$I_B(x, \alpha, \gamma) = [\bar{a} + f_B^\alpha(x) + \gamma((a^{(\bar{a})})_\alpha^- - f_B^\alpha(x)), \bar{a} + f_B^\alpha(x) + \gamma((a^{(\bar{a})})_\alpha^+ - f_B^\alpha(x))],$$

com f_A^α e f_B^α dados respectivamente por

$$f_A^\alpha(x) = \min\{(\max\{-(x - \bar{a}), ((b^{(\bar{b})})_\alpha^-)\}), ((b^{(\bar{b})})_\alpha^+)\}$$

e

$$f_B^\alpha(x) = \min\{(\max\{-(x - \bar{b}), ((a^{(\bar{a})})_\alpha^-)\}), ((a^{(\bar{a})})_\alpha^+)\}.$$

A interpretação associada ao parâmetro $\gamma \in [0, 1]$ é a seguinte, quanto mais próximo de 0 for o valor de γ , maior é a interatividade entre os números fuzzy A e B , de modo que a DPC J_0 é similar a DPC J_L . Enquanto que quanto mais próximo de 1 for o valor de γ , menor é a interatividade entre os números fuzzy A e B , de modo que a J_1 é igual a J_\wedge , isto é, a DPC J_1 remete a não interatividade.

Podemos também definir uma aritmética para números fuzzy interativos, segundo a família de DPCs J_γ , conforme Teorema 20.

Teorema 20. *Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathbb{F}_C}$, cujos α -níveis são $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, e J_γ a DPC entre A e B dada por (43). Para cada $\gamma \in [0, 1]$, tem-se que $A +_\gamma B \in \mathbb{R}_{\mathbb{F}_C}$ e os α -níveis de $A +_\gamma B$ são dados por*

$$[A +_\gamma B]_\alpha = [c_\alpha^-, c_\alpha^+] + \{\bar{a} + \bar{b}\} \quad (44)$$

sendo,

$$c_\alpha^- = \inf_{\beta \geq \alpha} h_{(A+B)}^-(\beta, \gamma) \quad e \quad c_\alpha^+ = \sup_{\beta \geq \alpha} h_{(A+B)}^+(\beta, \gamma). \quad (45)$$

com

$$h_{(A+B)}^-(\beta, \gamma) = \min\{ (a^{(\bar{a})})_\beta^- + (b^{(\bar{b})})_\beta^+ + \gamma((b^{(\bar{b})})_\beta^- - (b^{(\bar{b})})_\beta^+), \\ (a^{(\bar{a})})_\beta^+ + (b^{(\bar{b})})_\beta^- + \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^- - (a^{(\bar{a})})_\beta^+), \\ \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^- + (b^{(\bar{b})})_\beta^-) \}$$

e

$$h_{(A+B)}^+(\beta, \gamma) = \max\{ (a^{(\bar{a})})_\beta^- + (b^{(\bar{b})})_\beta^+ + \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^+ - (a^{(\bar{a})})_\beta^-), \\ (a^{(\bar{a})})_\beta^+ + (b^{(\bar{b})})_\beta^- + \gamma((b^{(\bar{b})})_\beta^+ - (b^{(\bar{b})})_\beta^-), \\ \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^+ + (b^{(\bar{b})})_\beta^+) \}$$

A soma interativa $+_\gamma$ satisfaz também a seguinte condição, $A +_{\gamma_1} B \subseteq A +_{\gamma_2} B$, para todos $A, B \in \mathbb{R}_{\mathbb{F}_C}$ e $0 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 \leq 1$. Tais propriedades serão observadas nos métodos numéricos apresentados nesse minicurso.

A diferença baseada nesse tipo de interatividade é definida por $A -_\gamma B = A +_\gamma (-B)$, e seus α -níveis são dados através do seguinte teorema.

VI Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (VI CBSF)

03–05 de Novembro de 2021, São José do Rio Preto – SP, Brasil.

Teorema 21. *Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{Fc}$ cujos α -níveis são dados por $[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]^\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$. Portanto, para todo $\alpha \in [0, 1]$ tem-se*

$$[A -_\gamma B]_\alpha = [d_\alpha^-, d_\alpha^+] + \{\bar{a} - \bar{b}\}, \quad (46)$$

em que

$$d_\alpha^- = \inf_{\beta \geq \alpha} h_{(A-B)}^-(\beta, \gamma) \text{ e } d_\alpha^+ = \sup_{\beta \geq \alpha} h_{(A-B)}^+(\beta, \gamma). \quad (47)$$

com

$$h_{(A-B)}^-(\beta, \gamma) = \min\{ (a^{(\bar{a})})_\beta^- - (b^{(\bar{b})})_\beta^- + \gamma((b^{(\bar{b})})_\beta^- - (b^{(\bar{b})})_\beta^+), \\ (a^{(\bar{a})})_\beta^+ - (b^{(\bar{b})})_\beta^+ + \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^- - (a^{(\bar{a})})_\beta^+), \\ \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^- - (b^{(\bar{b})})_\beta^+) \}$$

e

$$h_{(A-B)}^+(\beta, \gamma) = \max\{ (a^{(\bar{a})})_\beta^- - (b^{(\bar{b})})_\beta^- + \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^+ - (a^{(\bar{a})})_\beta^-), \\ (a^{(\bar{a})})_\beta^+ - (b^{(\bar{b})})_\beta^+ + \gamma((b^{(\bar{b})})_\beta^+ - (b^{(\bar{b})})_\beta^-), \\ \gamma((a^{(\bar{a})})_\beta^+ - (b^{(\bar{b})})_\beta^-) \}$$

Através das fórmulas fornecidas pelos Teoremas 20 e 21 é possível calcular a soma e a diferença entre números fuzzy com diferentes níveis de interatividade.

Exemplo 12. Sejam $A = (1; 2; 3)$ e $B = (1; 2; 3; 4)$ números fuzzy. As somas J_γ -interativas são dadas por

$$[A +_\gamma A]_\alpha = [\gamma(-2 + 2\alpha), \gamma(2 - 2\alpha)] + 4.$$

$$[A +_\gamma B]_\alpha = [-0.5 + \gamma(-2 + 2\alpha), 0.5 + \gamma(2 - 2\alpha)] + 4.5.$$

Veja que para $\gamma = 1$, a soma obtida é a usual, enquanto que para $\gamma = 0$ a soma $A +_0 A$ é igual a soma $A +_L A$ negativamente correlacionada. Isso ocorre em geral, isto é, a soma via $\gamma = 1$ remete a não-interatividade e a soma $\gamma = 0$ é equivalente à soma negativamente correlacionada, quando essa existe.

Já no caso da soma entre A e B a soma via J_L não é possível ser computada, já que A e B não são completamente correlacionados. As Figuras 9 e 10 ilustram a soma J_γ -interativa para $\gamma \in \{0; 0, 25; 0, 5; 0, 75; 1\}$.

Exemplo 13. Sejam $A = (2; 3; 5; 6)$ e $B = (0; 4; 8)$ números fuzzy. Assim, as diferenças J_γ -interativas são dadas por

$$[A -_\gamma A]^\alpha = [\gamma(-4 + 2\alpha), \gamma(4 - 2\alpha)] + 0.$$

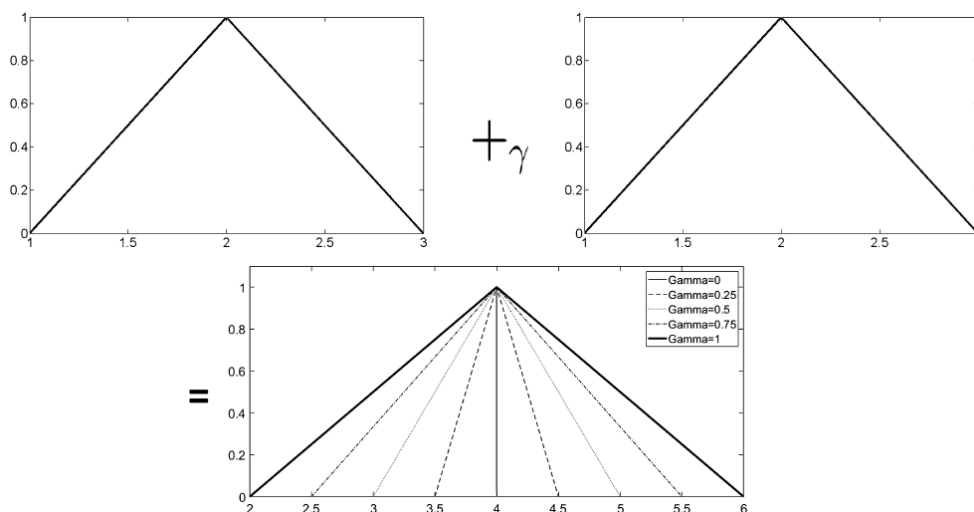


Figura 9: Soma J_γ -interativa $A +_\gamma A$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (1; 2; 3)$.

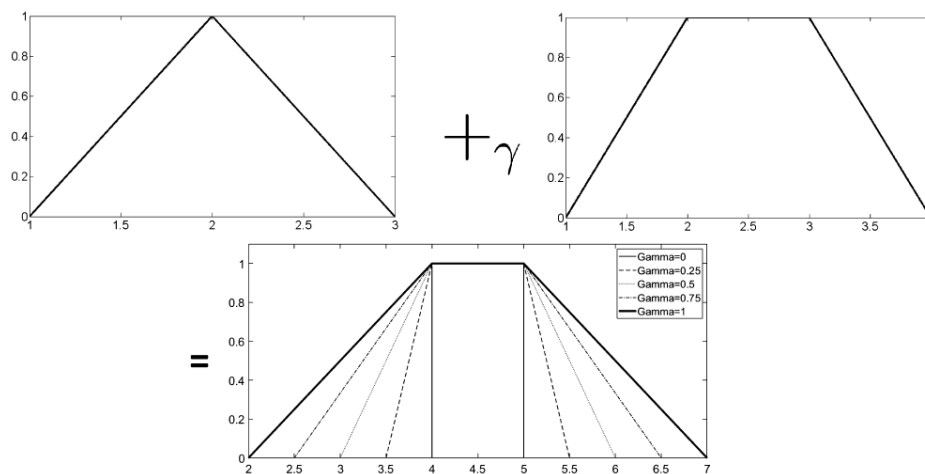


Figura 10: Soma J_γ -interativa $A +_\gamma B$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (1; 2; 3)$ e $B = (1; 2; 3; 4)$.

$$[A -_\gamma B]^\alpha = \left[\bigwedge_{\beta \geq \alpha} \min\{2 - 3\beta + \gamma(-8 + 8\beta), -2 + 3\beta + \gamma(-4 + 2\beta), \gamma(-6 + 5\beta)\}, \right. \\ \left. \bigvee_{\beta \geq \alpha} \max\{2 - 3\beta + \gamma(4 - 2\beta), -2 + 3\beta + \gamma(8 - 8\beta), \gamma(6 - 5\beta)\} \right] + 0.$$

Para $\gamma = 1$, a J_γ -diferença é equivalente a a diferença usual entre números fuzzy, como pode ser visto nas Figuras 11 e 12. Por outro lado, para a diferença J_γ -interativa, com $\gamma = 0$, coincide com a g -diferença entre números fuzzy.

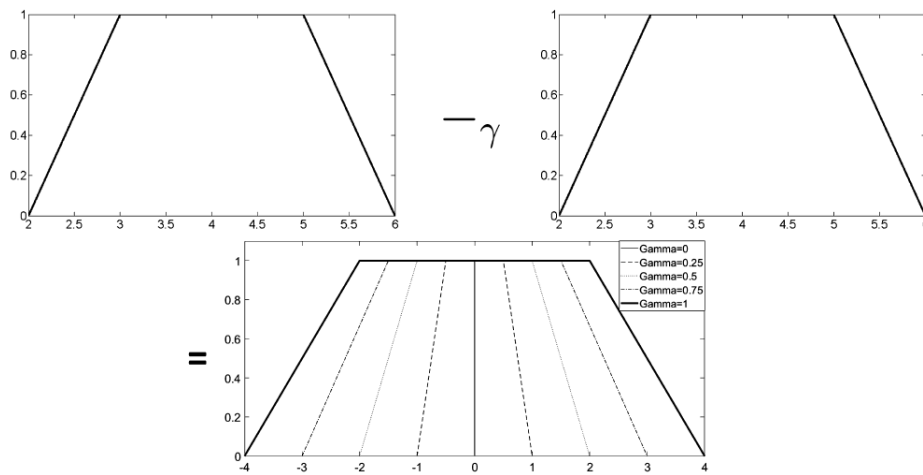


Figura 11: Diferença J_γ -interativa $A -_\gamma A$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (2; 3; 5; 6)$.

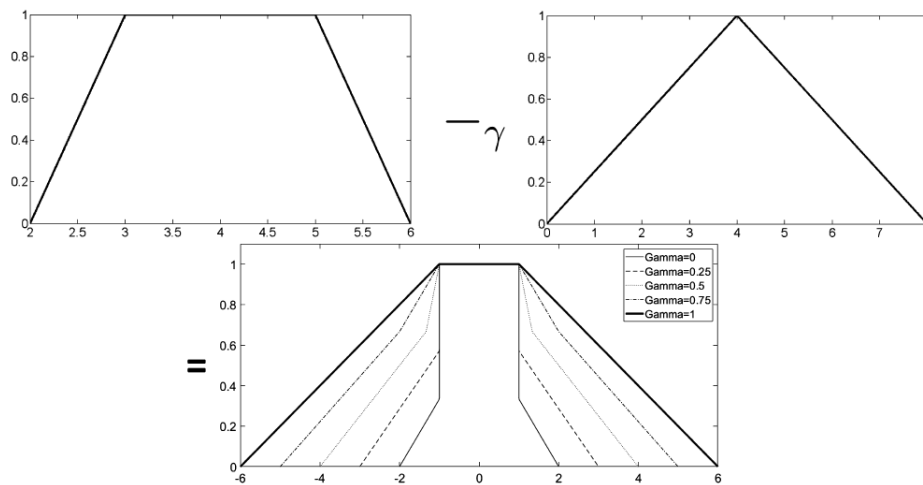


Figura 12: Diferença J_γ -interativa $A -_\gamma B$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (2; 3; 5; 6)$ e $B = (0; 4; 8)$.

A partir da J_γ -diferença é possível definir uma nova família de derivadas fuzzy, que incorpora a noção de interatividade.

Definição 20. *Seja $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F_C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Para cada $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, considere J_h a distribuição de possibilidade conjunta entre $y(x_0 + h)$ e $y(x_0)$, e seja $\mathcal{J} = \{J_h \mid 0 < |h| < \delta\}$. A derivada interativa da função fuzzy $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F_C}$ em x_0 com respeito a \mathcal{J} , é dada por*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + h) -_{J_h} y(x_0)}{h}, \quad (48)$$

se o limite existe. Nesse caso, o limite (48) é chamado de derivada interativa de y em x_0 e é denotado por $y'_{\mathcal{J}}(x_0)$.

Motivados por essa família de DPCs, estabelecemos um conceito de derivada interativa para funções fuzzy, que podem ser utilizadas em EDFs. Por exemplo, um PVIF considerando a derivada interativa fuzzy J_h , pode ser escrito como

$$\begin{cases} y'_{\mathcal{J}}(x) = f(y(x), x) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{F_C} \end{cases} \quad (49)$$

Isso significa que para determinar a solução para esse problema, é necessário primeiramente definir qual é a família de distribuições que está sendo considerada. Em particular, se a família de DPCs é a $\mathcal{I} = \{J_{\gamma_h} \mid 0 < |h| < \delta\}$ em que J_{γ_h} são as DPCs entre $y(x_0 + h)$ e $y(x_0)$ dadas por (43), então $y'_{\mathcal{I}}$ é chamada de \mathcal{I} -derivada interativa de y .

Observe que para uma função fuzzy $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F_C}$ dada, as DPCs J_{γ_h} relacionam os números fuzzy $y(t)$ e $y(t + h)$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Do ponto de vista de sistemas dinâmicos, tem-se como objetivo estabelecer alguma informação sobre o futuro $y(t + h)$, sabendo o presente $y(t)$, com $h > 0$. Neste caso particular, a informação é fornecida através das DPCs J_γ . Por exemplo, se temos como hipótese que a função fuzzy deve ter diâmetro decrescente com respeito ao tempo, então a fórmula (43) com $\gamma = 0$ produz a dinâmica com essa propriedade.

Como visto no Exemplo 13, a diferença generalizada fuzzy é um caso particular de diferença interativa, pois é obtida através da DPC J_0 . Sendo assim, definindo-se $J_{\gamma_h} \equiv J_0$, para todo $h > 0$, temos que a g -derivada de uma função fuzzy $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F_C}$ coincide com a \mathcal{I} -derivada interativa de y , como enunciado no teorema abaixo.

Teorema 22. *Seja $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F_C}$. Então y é g -diferenciável se, e somente se, y é \mathcal{I} -diferenciável.*

Como a g -derivada generaliza as derivadas Hukuhara e Hukuhara generalizada, então estas também são casos particulares de derivadas iterativas.

Numericamente o PVIF dado em (49) pode ser estudado como

$$\frac{y(x_0 + h) -_{\gamma} y(x_0)}{h} = f(y(x), x) \iff y(x_0 + h) = y(x_0) +_{\gamma} h(f(y(x), x)),$$

para todo $h > 0$.

A expressão à direita pode ser vista como uma generalização do método clássico de Euler. Essa abordagem será discutida na próxima subseção.

6.1 Métodos numéricos para Equações Diferenciais Fuzzy via J_{γ}

O método clássico de Euler é utilizado para aproximar as soluções clássicas de equações diferenciais ordinárias a partir de uma condição inicial, dada por

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} . \quad (50)$$

O algoritmo do método de Euler é descrito por

$$x_{k+1} = x_k + h f_i(t_k, x_k), \quad (51)$$

com $0 \leq k \leq N - 1$, em que N é o número de partições que o intervalo é dividido, h é o tamanho de cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$, cuja condição inicial é dada por (t_0, x_0) .

Em nosso caso, consideraremos que a condição inicial será incerta e dada por números fuzzy. Desse modo, as aritméticas presentes no método de Euler devem ser adaptadas para esses números. Sendo assim, a partir de uma condição inicial dada por número fuzzy, o método fica [18]

$$X_{k+1} = X_k +_J h f(t_k, X_k). \quad (52)$$

Para ilustrar melhor essa abordagem, considere o modelo populacional de Malthus dado pelo seguinte PVIF

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{F_C} \end{cases} , \quad (53)$$

com $\lambda > 0$.

Para o PVIF dado em (53) a solução numérica é determinada por

$$X_{k+1} = X_k +_J h(\lambda X_k). \quad (54)$$

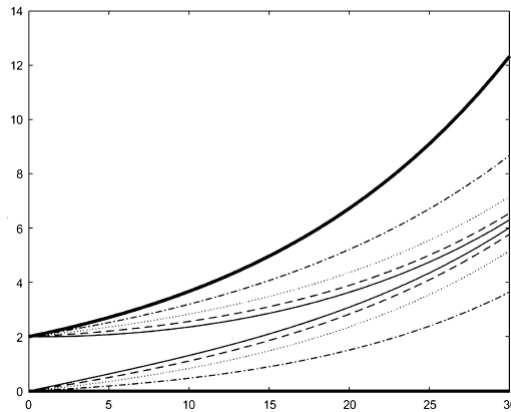


Figura 13: Visão superior da solução numérica para o modelo de Malthus dado em (54). As linhas contínuas, tracejadas, pontilhadas, pontilhadas-tracejadas e em negrito representam as soluções numéricas para $\gamma = 0$, $\gamma = 0,25$, $\gamma = 0,5$, $\gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, respectivamente. A condição inicial é dada por $A = (0; 1; 2)$ e os parâmetros utilizados foram $h = 0,125$ e $\lambda = 0,5$.

A Figura 13 ilustra a solução numérica para diferentes valores de γ . Veja que essa abordagem permite considerar soluções com diâmetros crescentes ou decrescentes, baseados na escolha dos valores de $\gamma \in [0, 1]$.

Com isso é possível fornecer soluções numéricas que possuem um comportamento qualitativamente similar ao caso clássico, mas com diferentes comportamentos sobre a incerteza que evolui ao longo da dinâmica. Por exemplo, para $\gamma = 1$ a solução numérica possui um diâmetro crescente e portanto propaga incerteza ao longo do processo, enquanto que para $\gamma = 0$ temos um diâmetro decrescente podendo assim controlar a incerteza ao longo do processo.

Podemos utilizar essa família de distribuições de possibilidade conjunta para fornecer soluções para EDF através do princípio de extensão sup- J , conforme descrito na próxima subseção.

6.2 Soluções via princípio de extensão sup- J para Equações Diferenciais Fuzzy via J_γ

Para essa abordagem, também consideramos um sistema descrito por uma equação diferencial em que as condições iniciais são incertas e dadas por números fuzzy, isto é,

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{F_c} \end{cases} \quad (55)$$

VI Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (VI CBSF)

03–05 de Novembro de 2021, São José do Rio Preto – SP, Brasil.

Para resolver essa EDF através do princípio de extensão sup- J é preciso primeiro obter a solução analítica clássica da equação diferencial $x'(t) = f(x(t), t)$, para que em seguida seja estendida pelo princípio de extensão. Quando se tem uma única condição inicial fuzzy, o princípio de extensão sup- J produz a mesma solução, independentemente da conjunta J escolhida (em particular para J_\wedge).

Sendo assim, para constatar as vantagens de se utilizar a família J_γ consideraremos um exemplo um pouco mais sofisticado. Considere a seguinte equação diferencial que descreve uma dinâmica de advecção

$$\begin{cases} u_t + \kappa u_x = 0 \\ u(x, 0) = \eta(x) \end{cases}, \quad (56)$$

em que κ representa a velocidade constante, $\eta(x)$ uma função que descreve a condição inicial do problema, u_t e u_x são as derivadas parciais com respeito ao tempo e ao espaço, respectivamente.

A equação de advecção é amplamente utilizada nas áreas de física e engenharia para descrever o transporte de substâncias ou quantidades, através de um fluxo. Por exemplo, para descrever o transporte de poluentes em um rio.

A solução de (56) é dada por

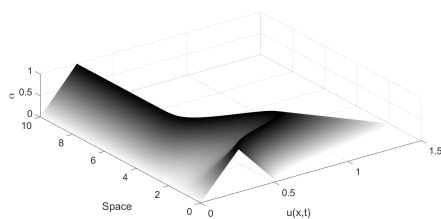
$$u(x, t) = \eta(x - \kappa t). \quad (57)$$

Considerando que no sistema (56) a condição inicial seja fuzzy, isto é, $\eta(x)$ atribui para cada $x \in \mathbb{R}$ um valor fuzzy, utilizaremos o princípio de extensão sup- J para estender a solução $u(x, t) = \eta(x - \kappa t)$. Para exemplificar, considere o sistema abaixo

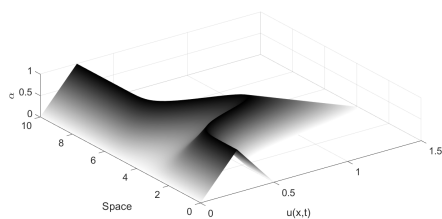
$$\begin{cases} u_t + 0.5u_x = 0 \\ u(x, 0) = A \exp(-(x - 2)^2) + B \\ A \in \mathbb{R}_{F_C} \\ B \in \mathbb{R}_{F_C} \end{cases}. \quad (58)$$

Tomando $A = (0; 0.5; 1)$ e $B = (0; 0.25; 0.5)$, obtemos as seguintes soluções representadas nos gráficos abaixo [51]

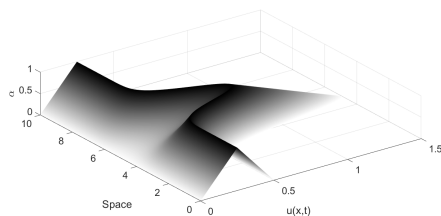
As Figuras 14, 15 e 16 apontam que o local de maior incerteza ocorre no extremo valor da solução clássica. Essa incerteza pode ser controlada pelas DPCs J_γ . Na verdade, o diâmetro das soluções fuzzy, para cada x , é decrescente conforme o valor de γ diminui, corroborando os resultados teóricos estabelecidos em [18]. Essa propriedade está associada com o fato de que $J_\lambda \subseteq J_\gamma$, para todo



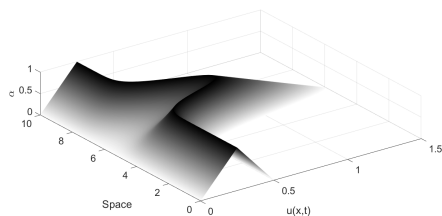
(a) Solução em $t = 0$.



(b) Solução em $t = 3.8$.

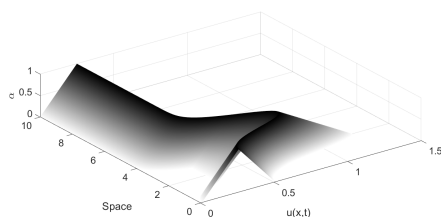


(c) Solução em $t = 5.8$.

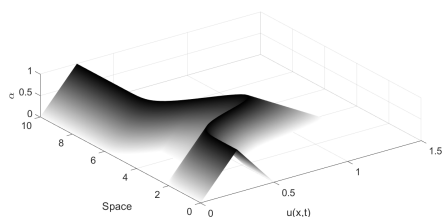


(d) Solução em $t = 7.8$.

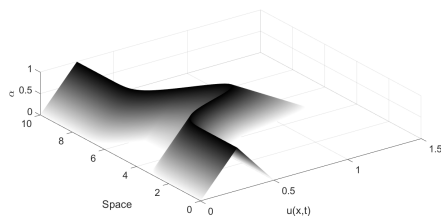
Figura 14: Solução fuzzy de (58) via princípio de extensão sup- J , para $J = J_1$.



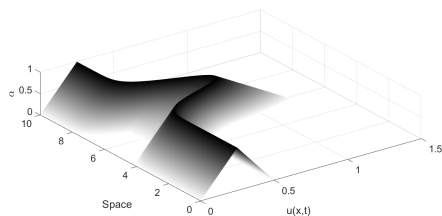
(a) Solução em $t = 0$.



(b) Solução em $t = 3.8$.



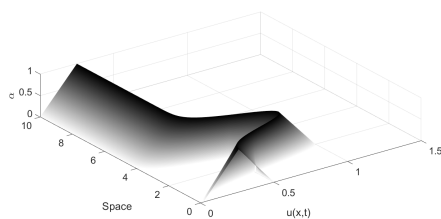
(c) Solução em $t = 5.8$.



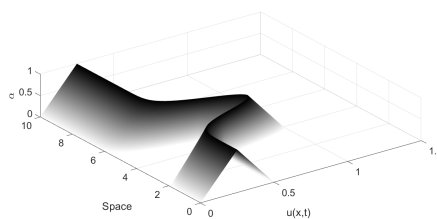
(d) Solução em $t = 7.8$.

Figura 15: Solução fuzzy de (58) via princípio de extensão sup- J , para $J = J_{0.5}$.

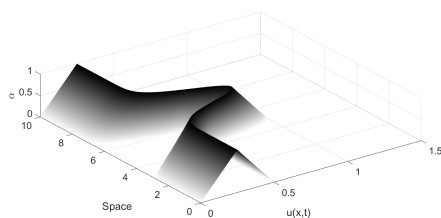
$0 \leq \lambda \leq \gamma \leq 1$. Consequentemente a solução fuzzy obtida por J_0 é mais específica que $J_{0.5}$ e J_1 . Em outras palavras, o uso de interatividade faz com que a



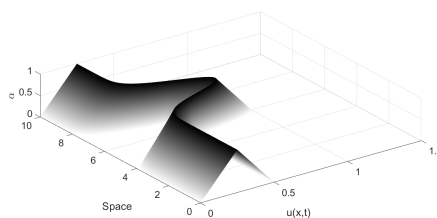
(a) Solução em $t = 0$.



(b) Solução em $t = 3.8$.



(c) Solução em $t = 5.8$.



(d) Solução em $t = 7.8$.

Figura 16: Solução fuzzy de (58) via princípio de extensão sup- J , para $J = J_0$.

solução fuzzy propague menos incerteza que no caso de não interatividade. Ainda mais, dentre os valores de $\gamma \in [0, 1]$, a J_0 produz a menor incerteza possível.

7 Considerações Finais

Historicamente, o cálculo diferencial e integral para processos fuzzy em geral, isto é, para funções fuzzy que a cada número real associa um número fuzzy, é feito a partir da extensão do cálculo para funções intervalares. Nesse procedimento, as operações aritméticas envolvidas (exceto a diferença) não consideram qualquer tipo de “dependência” entre os intervalos (números fuzzy, no cálculo fuzzy) envolvidos. Na nossa terminologia, os números fuzzy envolvidos são não interativos. Como a diferença não interativa não admite inverso aditivo ($A - A \neq 0$), optou-se pela diferença de Hukuhara na definição de derivada para funções fuzzy [40]. Ainda assim, o cálculo diferencial sofre do defeito de incluir em seu contexto apenas funções com diâmetros crescentes. De algumas forma, tal defeito é transferido para a integral e, mais ainda, para equações diferenciais fuzzy [25, 8].

Com o objetivo de evitar boa parte desses defeitos, principalmente a limitação de tratar apenas os processos com diâmetros crescentes (aumento de incertezas, do ponto de vista do fenômeno) alguns autores têm feito adaptações na diferença de Hukuhara e, conseqüentemente, na derivada para funções fuzzy [49, 10]. Porém,

muitos defeitos permanecem. Por exemplo, as somas de Riemann consideram aritméticas não interativas.

Nosso grupo tem atacado esses problemas alterando completamente todas as operações aritméticas envolvidas a partir do conceito de números fuzzy interativos, análogo aquele usado para variáveis aleatórias, que consideram distribuições de probabilidades.

O minicurso, portanto, é de aspecto teórico e trata de cálculo diferencial e integral para processos fuzzy interativos. Como no caso estocástico, tais processos apresentam autocorrelação entre instantes distintos, o que permite modelar fenômenos sob efeito de memória, muito comum em fenômenos naturais, como os biológicos. Tecnicamente, tais correlações (dependência entre estados) são modeladas pelas chamadas distribuições de possibilidades conjuntas (análogas às distribuições de probabilidades conjuntas no caso estocástico). Cada distribuição de possibilidades conjunta atribui o tipo específico de interatividade entre os números fuzzy envolvidos. Embora haja uma infinidade de conjuntas, cada uma delas dando origem a diferentes aritméticas, o texto se concentra em duas diferentes classes de interatividades: as F-correlacionadas - com destaque às linearmente correlacionadas, e outra dada por uma família parametrizada de distribuições.

Diferentemente do que chamamos de cálculo interativos, o cálculo diferencial e integral fuzzy até então, se utiliza de aritmética para números fuzzy não interativos, o que limita em muito o tratamento de fenômenos, principalmente aqueles supostamente com memórias.

Por motivos concretos, o texto foca no cálculo interativo em que as distribuições de possibilidades são do tipo F-correlação (Capítulo 3) - com destaque às linearmente correlacionadas (Capítulo 4 e 5) e também pela família parametrizada de distribuições (Capítulo 6).

O texto apresenta métodos analíticos e numéricos tanto para integração de funções fuzzy bem como para equações diferenciais fuzzy. Além disso, procurou-se comparar as diferentes abordagens apresentadas com métodos presentes na literatura, se utilizando de aplicações na área de Biomatemática, com ênfase em modelos populacionais como o Malthusiano e de Verhulst (ou logístico). Nesses modelos foi considerada incerteza em diferentes aspectos, como incerteza nas condições iniciais e/ou no campo de direções. Através de diferentes conjuntas é possível observar como a incerteza evolui para diferentes situações fenomenológicas. Neste caso, é feita uma discussão sobre “controle” da incerteza ao longo da evolução de um processo fuzzy. No caso do processo envolvendo a família de distribuições parametrizadas (J_γ) , tal controle é feito via parâmetro γ , já que o mesmo “mede” o nível de interatividade entre as variáveis fuzzy envolvidas. Essa

abordagem é ilustrada através de um problema de advecção, muito estudado nas áreas de Biologia e Física.

Referências

- [1] AHMAD, M. Z., HASAN, M. K., AND BAETS, B. D. Analytical and numerical solutions of fuzzy differential equations. *Information Sciences* 236 (2013), 156–167.
- [2] ALLAHVIRANLOO, T., AHMADY, N., AND AHMADY, E. Numerical solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method. *Information Sciences* 177, 7 (2007), 1633–1647.
- [3] BAN, A., AND BEDE, B. Cross product of l- r fuzzy numbers and applications. *Anal. Univ. Oradea, fasc. math* 9 (2002), 95–108.
- [4] BAN, A., AND BEDE, B. Properties of the cross product of fuzzy numbers. *Journal of Fuzzy Mathematics* 14, 3 (2006), 513.
- [5] BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C., AND LODWICK, W. A. *First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Springer, 2016.
- [6] BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C., AND TONELLI, P. A. On the continuity of the zadeh’s extension. In *Proc. Seventh IFSA World Congress* (1997), vol. 2, pp. 3–8.
- [7] BARROS, L. C., AND SANTO PEDRO, F. Fuzzy differential equations with interactive derivative. *Fuzzy sets and systems* 309 (2017), 64–80.
- [8] BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [9] BEDE, B., AND GAL, S. G. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems* 151, 3 (2005), 581–599.
- [10] BEDE, B., STEFANINI, L., ET AL. Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets Syst.* 230, 1 (2013), 119–141.

- [11] CABRAL, V. M., AND BARROS, L. C. Fuzzy differential equation with completely correlated parameters. *Fuzzy Sets and Systems* 265 (2015), 86–98.
- [12] CARLSSON, C., FULLÉR, R., ET AL. Additions of completely correlated fuzzy numbers. In *2004 IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (2004), vol. 1, IEEE, pp. 535–539.
- [13] DIAMOND, P., AND KLOEDEN, P. Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. In *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Springer, 2000, pp. 583–641.
- [14] DUBOIS, D., AND PRADE, H. Additions of interactive fuzzy numbers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26, 4 (1981), 926–936.
- [15] ESMI, E., LAIATE, B., SANTO PEDRO, F., AND BARROS, L. C. Calculus for fuzzy functions with fuzzy coefficients. *Fuzzy Sets and System* (2020). Submetido.
- [16] ESMI, E., SÁNCHEZ, D. E., WASQUES, V. F., AND BARROS, L. C. Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values. *Fuzzy Sets and Systems* (2020).
- [17] ESMI, E., SANTO PEDRO, F., BARROS, L. C., AND LODWICK, W. Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function. *Information Sciences* 435 (2018), 150–160.
- [18] ESMI, E., WASQUES, V. F., AND BARROS, L. C. Addition and subtraction of interactive fuzzy numbers via family of joint possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems* (2021).
- [19] FAVILLA, J., MACHION, A., AND GOMIDE, F. Fuzzy traffic control: adaptive strategies. In *[Proceedings 1993] Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (1993), IEEE, pp. 506–511.
- [20] FULLÉR, R. On generalization of nguyen’s theorem: a short survey of recent developments. In *Advances in soft computing, intelligent robotics and control*. Springer, 2014, pp. 183–190.
- [21] FULLÉR, R., AND MAJLENDER, P. On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems* 143, 3 (2004), 355–369.

- [22] GAL, S. G. Approximation theory in fuzzy setting. *Handbook of analytic-computational methods in applied mathematics* (2000), 617–666.
- [23] GHAZANFARI, B., AND SHAKERAMI, A. Numerical solutions of fuzzy differential equations by extended runge-kutta-like formulae of order 4. *Fuzzy Sets and Systems 189* (2011), 74–91.
- [24] JAYAKUMAR, T., MAHESKUMAR, D., AND KANAGARAJAN, K. Numerical solution of fuzzy differential equations by runge kutta method of order five. *Applied Mathematical Sciences 6* (2012), 2989–3002.
- [25] KALEVA, O. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems 24*, 3 (1987), 301–317.
- [26] KLIR, G. J., AND YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NY, 1995.
- [27] LAIATE, B., DE BARROS, L., SANTOPEDRO, F., AND ESMI, E. Bidimensional fuzzy initial value problem of autocorrelated fuzzy processes via cross product: the prey-predator model. In *International Fuzzy Systems Association World Congress. EUSFLAT* (2021).
- [28] LAIATE, B., WATANABE, R. A., ESMI, E., SANTO PEDRO, F., AND BARROS, L. C. A cross product of \mathcal{S} -linearly correlated fuzzy numbers. In *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)* (2021), IEEE, pp. 1–6.
- [29] LODWICK, W. A., AND KACPRZYK, J. *Fuzzy Optimization: Recent Advances and Applications*, 1 ed. 254. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2010.
- [30] LONGO, F., LAIATE, B., PEDRO, F. S., ESMI, E., BARROS, L. C., AND MEYER, J. F. A-cross product for autocorrelated fuzzy processes: the hut-chinson equation. In *North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference* (2021), Springer, pp. 241–252.
- [31] MA, M., FRIEDMAN, M., AND KANDEL, A. Numerical solution of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems 105* (1999), 133–138.
- [32] NGUYEN, H. T. A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications 64*, 2 (1978), 369–380.

- [33] NIETO, J. J., KHASTAN, A., AND IVAZ, K. Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 3 (2009), 700–707.
- [34] PEDRO, F. S. *Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de população*. PhD thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2017.
- [35] PEDRO, F. S., BARROS, L. C., , AND ESMI, E. Interactive fuzzy process: An epidemiological model. In *Fuzzy Information Processing* (Cham, 2018), Springer International Publishing, pp. 108–118.
- [36] PEDRO, F. S., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Measure of interactivity on fuzzy process autocorrelated: Malthusian model. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications* (Cham, 2019), Springer International Publishing, pp. 567–577.
- [37] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy systems engineering: toward human-centric computing*. John Wiley & Sons, 2007.
- [38] PINTO, N. J. B., ESMI, E., WASQUES, V. F., AND BARROS, L. C. Least square method with quasi linearly interactive fuzzy data: Fitting an HIV dataset. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications* (Cham, 2019), Springer International Publishing, pp. 177–189.
- [39] PINTO, N. J. B., WASQUES, V. F., ESMI, E., AND BARROS, L. C. *Least Squares Method with Interactive Fuzzy Coefficient: Application on Longitudinal Data*. Springer International Publishing, 2018, pp. 132–143.
- [40] PURI, M. L., AND RALESCU, D. A. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91, 2 (1983), 552–558.
- [41] PURI, M. L., AND RALESCU, D. A. Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 114, 2 (1986), 409–422.
- [42] SACILOTTO, C., VENDITE, L. L., SILVEIRA, G. P., AND FERREIRA, U. Modelagem fuzzy para prever riscos de metástase e morte para neoplasia de rim. *Biomatemática IMECC - UNICAMP* 28 (2018), 25–38.

VI Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (VI CBSF)

03–05 de Novembro de 2021, São José do Rio Preto – SP, Brasil.

- [43] SANCHEZ, D. E., BARROS, L. C., AND ESMI, E. On interactive fuzzy boundary value problems. *Fuzzy Sets and Systems* 358 (2019), 84–96.
- [44] SANCHEZ, D. E., WASQUES, V. F., ARENAS, J. P., ESMI, E., AND BARROS, L. C. On interactive fuzzy mechanical vibrations problems. *Applied Mathematical Modelling* 96 (2021), 304–314.
- [45] SANTO PEDRO, F., BARROS, L. C., AND ESMI, E. Population growth model via interactive fuzzy differential equation. *Information sciences* 481 (2019), 160–173.
- [46] SANTO PEDRO, F., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Calculus for linearly correlated fuzzy function using fréchet derivative and riemann integral. *Information Sciences* 512 (2020), 219–237.
- [47] SANTO PEDRO, F., LAIATE, B., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Interactive riemann integral in the space of the linearly correlated fuzzy numbers $\mathbb{R}_{F(A)}$. Submetido.
- [48] SEIKKALA, S. On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems* 24, 3 (1987), 319 – 330. Fuzzy Numbers.
- [49] STEFANINI, L., AND BEDE, B. Generalized hukuvara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71, 3-4 (2009), 1311–1328.
- [50] SUSSNER, P., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Controlling the width of the sum of interactive fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (2016), vol. 1, pp. 85–104.
- [51] WASQUES, V., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Solution to the advection equation with fuzzy initial condition via sup-j extension principle. In *2021 Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2021)* (2021), Atlantis Press.
- [52] WASQUES, V., ESMI, E., BARROS, L. C., AND PEDRO, F. S. Numerical solution for reversible chemical reaction models with interactive fuzzy initial conditions. In *2020 North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference* (2020), Springer, Cham.

VI Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (VI CBSF)

03–05 de Novembro de 2021, São José do Rio Preto – SP, Brasil.

- [53] WASQUES, V., ESMI, E., BARROS, L. C., AND SUSSNER, P. Numerical solution for Lotka-Volterra model of oscillating chemical reactions with interactive fuzzy initial conditions. In *2019 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019)* (2019), Atlantis Press.
- [54] WASQUES, V. F. Lógica fuzzy aplicada a geologia. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.
- [55] WASQUES, V. F., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Solução numérica para PVI com condições iniciais fuzzy interativas: uma aplicação a modelos do tipo SIR. *Biomatemática IMECC - UNICAMP* 27, 2 (2017), 127–144.
- [56] WASQUES, V. F., ESMI, E., BARROS, L. C., AND BEDE, B. Comparison between numerical solutions of fuzzy initial-value problems via interactive and standard arithmetics. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications* (Cham, 2019), Springer International Publishing, pp. 704–715.
- [57] WASQUES, V. F., ESMI, E., BARROS, L. C., PEDRO, F. S., AND SUSSNER, P. Higher order initial value problem with interactive fuzzy conditions. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZIEEE)* (2018), pp. 1–8.
- [58] WASQUES, V. F., ESMI, E., BARROS, L. C., AND SUSSNER, P. *Numerical Solutions for Bidimensional Initial Value Problem with Interactive Fuzzy Numbers*. Springer International Publishing, 2018, pp. 84–95.
- [59] WASQUES, V. F., ESMI, E., BARROS, L. C., AND SUSSNER, P. The generalized fuzzy derivative is interactive. *Information Sciences* 519 (2020), 93–109.
- [60] WASQUES, V. F., ESMI, E., BARROS, L. C., AND SUSSNER, P. Numerical solution for fuzzy initial value problems via interactive arithmetic: Application to chemical reactions. *International Journal of Computational Intelligence Systems* 13, 1 (2020), 1517–1529.
- [61] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 3 (1965), 338–353.
- [62] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - i. *Information Sciences* 8 (1975), 199–249.