Lista de Exercícios - Álgebra Linear - Física

1 Produto Interno

Exercício 1.1. *Considere $P_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau até n. As seguintes aplicações são produtos internos?*

1. $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$
2. $\langle f, g\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, *sendo* $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ *e* $g(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$

Exercício 1.2. *(Regra do paralelogramo) Mostre que para todo $u, v \in V$ temos*

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$$

Exercício 1.3. *Sabendo que $||u|| = 3$ e $||v|| = 5$, determine α tal que $\langle u + \alpha v, u - \alpha v\rangle = 0$.*

Exercício 1.4. *Mostre que u e v são ortogonais se, e somente se, $||u + \alpha v|| \geq ||u||$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Exercício 1.5. *O complemento ortogonal de um subespaço U é definido por*

$$U^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0, \forall u \in U\}.$$

Determine o complemento ortogonal dos seguinte subespaços

1. $U = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } 2x + z = y\}$.

Exercício 1.6. *Sejam V um espaço vetorial e U um subespaço de V. Mostre que $V = U \oplus U^{\perp}$. Utilize esse fato para mostrar que $V = ker(T) \oplus ImT$, em que $T : V \to V$ é uma transformação linear dada por*

$$T(u) = \langle u, u_1\rangle u_1 + \ldots + \langle u, u_n\rangle u_n,$$

com $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de V.

Exercício 1.7. *Dizemos que um operador linear $T : U \to U$ é uma isometria se $||T(u)|| = ||u||$ para todo $u \in U$. Verifique se as transformações abaixo são isometrias.*

1. $T(x, y) = (x cos\theta - y sen\theta, x sen\theta + y cos\theta)$.
2. $T(x, y) = (x + a, y + b)$.
3. $T(x, y) = (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$.

Exercício 1.8. *Mostre que*

1. *Toda isometria é um isomorfismo. Mostre que T^{-1} também é uma isometria, se T o for.*
2. *T é uma isometria se, e somente se, $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, para todo $u, v \in V$.*
3. *Se T_1 e T_2 são isometrias, então $T_1 \circ T_2$ é uma isometria.*

Exercício 1.9. *Determine uma base ortonormal para os subespaços*

1. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$.
2. $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } 2x + z = y\}$.