Lista de Exercícios - Álgebra Linear - Física

1 Transformação Linear

Exercício 1.1. *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear qualquer. Mostre que $T(0_U) = 0_V$.*

Exercício 1.2. *Verifique se as seguintes funções são transformações lineares.*

1. $F(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$
2. $F(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$
3. $F(x, y, z) = (x, x, x)$
4. $F(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$

Exercício 1.3. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função tal que $F(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$, $F(0, 1, 0) = (5, 2, 7)$ e $F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7)$. Determine um operador linear que satisfaz tais condições.*

Exercício 1.4. *Sejam $F : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ e $G : \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ funções definidas por $F(x) = \bar{x}$ e $G(x) = \bar{x}$. F e G são operadores lineares?*

Exercício 1.5. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz fixa. Considere a função $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = XA - AX$. Mostre que F é um operador linear.*

Exercício 1.6. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Mostre que se dim $U = n$ e $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então para toda sequência $v_1, \ldots, v_n \in V$ a aplicação*

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

é um operador linear.

Exercício 1.7. *Determine a base e dimensão do núcleo e imagem das seguintes transformações*

1. $F(x, y, z) = x + y - z$
2. $F(x, y, z) = (2x, x + y)$
3. $F(X) = MX + X$, *sendo*
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
4. $F(f(t)) = t^2 f''(t)$, *sendo f polinômios de grau menor ou igual a 2.*

Exercício 1.8. *Considere as mesmas transformações dadas no exercício anterior. Determine quais delas são isomorfismos. Escreva as transformações na forma matricial, com respeito às bases canônicas de cada espaço. Faça o mesmo com suas inversas, caso existam.*

Exercício 1.9. *Seja F uma transformação linear. A n-ésima potência de uma transformação é definida por $F^n = \underbrace{F \circ \cdot \circ F}_{n\ vezes}$. Dizemos que uma aplicação é idempotente se $F^2 = F$. Se n for o menor valor inteiro positivo tal que $F^n = 0$, então F é chamada de nilpotente de ordem n. Mostre que*

1. $F(x, y) = (0, x)$ *é nilpotente. Qual é o grau de nilpotência?*
2. *Se $F : V \to V$ é um operador idempotente, então $V = ker(F) \oplus Im(F)$.*
3. *Seja $F : V \to V$ um operador idempotente de grau n. Mostre que o conjunto*
$$U = \{u_0, F(u_0), \ldots, F^{n-1}(u_0)\}$$
é L.I, sendo u_0 tal que $F^{n-1}(u_0) \neq 0$.

Exercício 1.10. *Seja o operador de $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

sendo $B = \{(1, 2), (0, 5)\}$. Determine o operador linear T.

Faça o mesmo para

$$[T]_{C,C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

sendo $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.