Lista de Exercícios - Álgebra Linear - Física

1 Sistemas Lineares e Álgebra de Matrizes

Exercício 1.1. *Resolva os seguintes sistemas lineares:*

1. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+6y+3z=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-2 \\ 2y=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ 3x+y+3z+t=0 \\ x-y-z-5t=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+2y-12z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x-3y+5z=0 \end{cases}$

Exercício 1.2. *Considere os sistemas lineares dados no exercício anterior. Escreva cada um desse sistema linear na forma matricial, e resolva a equação matricial.*

Exercício 1.3. *Seja* $T : \mathbb{R} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *uma função dada por*

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Tal função é chamada de transformação de rotação. Mostre que

1. $T(\alpha)T(\beta) = T(\alpha+\beta)$
2. $T(-\alpha) = T(\alpha)^t$

Exercício 1.4. *Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica. O produto entre duas matrizes simétricas é simétrica?*

Exercício 1.5. *Mostre também que a soma de duas matrizes anti-simétricas é uma matriz anti-simétrica. O produto entre duas matrizes anti-simétricas é anti-simétrica?*

Exercício 1.6. *Seja A uma matriz de ordem n. Se $A \neq 0$, então $A^2 \neq 0$? Se a afirmação for verdadeira, então demonstre. Caso contrário exiba um contra-exemplo.*

Exercício 1.7. *Existe uma matriz inversível A tal que $A^2 = 0$? Justifique.*

2 Espaço Vetorial

Exercício 2.1. *Mostre que o conjunto dos complexos $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com soma e multiplicação usuais. Mostre também que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com soma e multiplicação usuais.*

Exercício 2.2. *Mostre que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com soma e multiplicação usuais.*

Exercício 2.3. *Seja $V = \mathbb{R}^2$. Defina as seguinte operações:*

Soma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, -x_1 + y_1)$

Multiplicação por escalar: $\lambda(x_1, y_1) = (3\lambda y, -\lambda x)$

V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com essas operações?

Exercício 2.4. *Mostre que o conjunto das funções diferenciáveis é um subespaço do espaço de funções.*

Exercício 2.5. *Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços*

1. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ *de* $\mathbb{R}^3$
2. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$ *de* $\mathbb{R}^3$
3. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}\}$ *de* $\mathbb{R}^3$
4. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y \text{ é irracional } \}$ *de* $\mathbb{R}^3$
5. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3z = 0\}$ *de* $\mathbb{R}^3$
6. $W = \{f(t) : f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$ *de* $P(\mathbb{R})$
7. $W = \{f(t) : f(t) + f'(t) = 0\}$ *de* $P(\mathbb{R})$
8. $W = \{f(t) : f(0) = 0\}$ *de* $C(I)$

Exercício 2.6. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e U e V subespaços de V. Se a seguinte afirmação for verdadeira, demonstre. Caso contrário, forneça um contra-exemplo.*

1. $U \cap V$ *é um subespaço de* V.
2. $U \cup V$ *é um subespaço de* V.
3. $U + V$ *é um subespaço de* V.

Exercício 2.7. *Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^3$, dados por $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$. Determine o subespaço $U \cap V$ e seu gerador.*

Exercício 2.8. *Sejam U e V subespaços de W. Mostre que $W = U \oplus V$ se, e somente se, cada vetor $w \in W$ admite única decomposição $w = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$.*

Exercício 2.9. *Mostre que o espaço das matrizes de ordem n pode ser escrito como soma direta entre $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ e $T = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$.*

Exercício 2.10. *Mostre que o espaço das funções poder ser escrito como soma direta entre o conjunto das funções pares e ímpares.*

Exercício 2.11. *Sejam W espaço vetorial, $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq W$ e $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq W$. Mostre que*

1. $U \subseteq [U]$.
2. *Se* $U \subseteq V$, *então* $[U] \subseteq [V]$.
3. $[U] = [[U]]$.
4. $[U \cup V] = [U] + [V]$.

Exercício 2.12. *Verifique se o conjunto abaixo é uma base para o espaço de matrizes $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercício 2.13. *Verifique se o conjunto abaixo é uma base para $\mathbb{R}^3$*

$$\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}$$

Exercício 2.14. *Mostre que se o conjunto $\{u, v, w\}$ é L.I, então $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é um conjunto L.I.*

Exercício 2.15. *Mostre que todo conjunto U de um espaço vetorial V que contém o vetor nulo é um cojunto L.D.*

Exercício 2.16. *Mostre que se $U = \{u\} \subset V$, com $u \neq 0_v$, então U é L.I.*